Ordonnancement – 2

1 Ordonnancement avec communications

1.1 Ordonnancement d'un graphe FORK (avec communications)

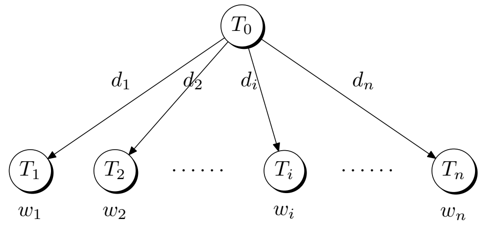


Fig. 1 – Graphe de FORK à n fils.

Définition 1 (FORK à n fils)**.** Un graphe FORK à n fils est un graphe de tâches à $n+1$ nœuds étiquetés par $T_0, T_1, \cdots, T_n$, comme illustré figure 1. Il y a une arête entre le nœud T_0 et chacun de ses fils T_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Chaque nœud possède un poids w_i qui représente le temps de traitement de la tâche T_i. Chaque arête (T_0, T_i) possède aussi un poids correspondant au volume de données échangées d_i si la tâche T_0 et la tâche T_i ne sont pas traitées sur le même processeur.

On suppose d'abord disposer d'une infinité de processeurs identiques et multi-port (qui peuvent initier plusieurs envois simultanés). On définit le problème d'optimisation suivant :

Définition 2 (FORK-SCHED-$\infty(G)$)**.** Étant donné un graphe FORK G à n fils et un ensemble infini de processeurs identiques, quelle est la durée de l'ordonnancement σ qui minimise le temps d'exécution ?

▷ **Question 1** *Donner un algorithme polynomial résolvant FORK-SCHED-∞.*

On s'intéresse maintenant au même problème avec un nombre borné de processeurs :

Définition 3 (FORK-SCHED-BOUNDED(G,p))**.** Étant donné un graphe FORK G à n fils et un ensemble de p processeurs identiques, quelle est la durée de l'ordonnancement σ qui minimise le temps d'exécution ?

▷ **Question 2** *Montrer que le problème de décision associé à FORK-SCHED-BOUNDED est NP-complet.*

On revient enfin au problème avec une infinité de processeurs identiques, mais on suppose désormais qu'un processeur ne peut communiquer qu'avec un seul processeur à la fois (modèle 1-port).

Définition 4 (FORK-SCHED-1-PORT-$\infty(G)$)**.** Étant donné un graphe FORK G à n fils et un ensemble infini de processeurs 1-port identiques, quelle est la durée de l'ordonnancement σ qui minimise le temps d'exécution ?

▷ **Question 3** *Démontrer que le problème de décision associé à FORK-SCHED-1-PORT-∞ est NP-complet. (*Indication : on pourra se ramener à 2-Partition-Eq, une variante de 2-Partition où les deux partitions doivent avoir le même cardinal.*)*

2 Ordonnancement sans coûts de communications

2.1 Ordonnancement sur un ensemble de processeurs hétérogènes (sans communications)

On dispose de p processeurs et d'un ensemble de n tâches indépendantes $T_1, \ldots, T_n$. On notera p_{ij} le temps de calcul de la tâche T_j sur le processeur P_i. Dans le cas où les processeurs vont simplement à des vitesses différentes (c'est-à-dire quand $p_{ij} = p_j/s_i$ où s_i représente la vitesse du processeur i et p_j la quantité de travail nécessaire au traitement de la tâche T_j), le problème est plus simple et on a le même type de résultat que dans le cas homogène. Dans le cas contraire, la meilleure approximation actuellement connue est une 2-approximation.

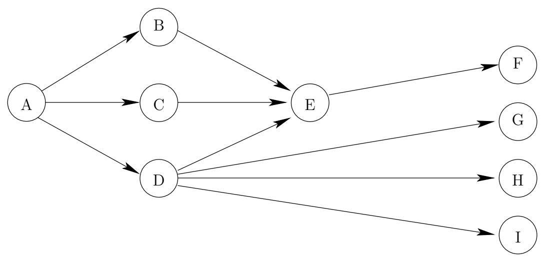
▷ **Question 4** *Montrer que décider de l'existence d'un ordonnancement dont le temps d'exécution est* 3 *pour un ensemble de tâches indépendantes* $\{T_1, \ldots, T_n\}$ *sur les processeurs* $P_1, \ldots, P_p$ *est un problème NP-complet. (*Indication : on pourra se ramener à 3DM.*)*

3 Ordonnancement de Coffman et Graham

Soient 2 machines identiques, n tâches $(T_i), i = 1 \ldots n$ de même durée et $\prec$ un ordre partiel strict sur les tâches représentant les contraintes de précédence. On note $\sigma = (\mu, \tau)$ un ordonnancement où $\mu(i)$ est la machine effectuant T_i et $\tau(i)$ est la date de début d'exécution de T_i.

Lorsque $T_i \prec T_j$, on dit que T_j est un successeur de T_i. De plus, lorsqu'il n'existe pas de tâche T_k telle que $T_i \prec T_k \prec T_j$, on dit que T_j est successeur direct de T_i. On définit de même les notions de prédécesseur et de prédécesseur direct.

▷ **Question 5** *Donner un ordonnancement optimal pour le graphe de tâches suivant.*



Étant donnée une fonction de priorité p (supposée injective) sur les tâches, on s'intéresse à l'ordonnancement de liste $\sigma_p = (\mu_p, \tau_p)$ définit comme suit : à chaque instant, on choisit parmi toutes les tâches prêtes celle de priorité maximale et on l'exécute sur la machine 1. De même, la seconde tâche prête la plus prioritaire est exécutée sur la machine 2.

▷ **Question 6** *Pour commencer, quelle condition doit vérifier* p *pour que les tâches soient exécutées dans un ordre compatible avec les contraintes de précédence ?*

▷ **Question 7** *Montrer que la machine 1 n'est jamais inactive, et que si* T_i *est effectuée sur la machine 1, toutes les tâches* T_j *effectuées après (ou au même moment) sont de priorité plus petite que* T_i*.*

Pour simplifier, on suppose que dans σ_p, lorsqu'il n'y a pas de tâche prête à être effectuer sur la machine 2, on effectue une tâche "fantôme" sans prédécesseur, de priorité plus faible que les tâches initiales. On définit une suite de couples de tâches (D_k, J_k), effectuées au même moment, respectivement par la machine 1 et 2. D_0 est la dernière tâche calculée par la machine 1. J_k (si elle existe) est la tâche la plus tardive effectuée avant D_{k-1} sur la machine 2, qui soit de priorité plus petite que D_{k-1}. On note F_k l'ensemble des tâches effectuées strictement après D_{k+1} et strictement avant D_k, plus la tâche D_k, et on note E_k l'ensemble des tâches de F_k sans prédécesseur dans F_k.

▷ **Question 8** *Donner pour l'exemple précédent, l'ordonnancement* σ_p*, les tâches* D_k *et* J_k *et les ensembles* F_k *et* E_k*, en supposant que la priorité* p *suit l'ordre alphabétique (décroissant) des noms des tâches. Même question pour une priorité compatible avec la précédence (à préciser) conduisant à un ordonnancement optimal.*

▷ **Question 9** *Montrer que toute tâche de* F_k *est de priorité plus grande que* D_k *et que toute tâche* T_i *de* F_{k-1} *est successeur de* D_k*. En déduire que les tâches de* E_{k-1} *sont les successeurs directs de* D_k *et que tout autre successeur direct de* D_k *a une priorité plus faible.*

On considère $\prec_l$ l'ordre lexicographique et on suppose que la priorité p vérifie en plus la propriété suivante : $p(T_j) < T_i)$ si et seulement si $l(T_j) \prec_l l(T_i)$ où $l(T_j)$ (resp. $l(T_i)$) est la liste des priorités des successeurs directs de T_j (resp. T_i) classé par ordre décroissant.

▷ **Question 10** *Montrer alors que toutes les tâches de* F_k *(notamment celles sans successeur dans* F_k*) sont prédécesseurs de toutes les tâches de* F_{k-1}*. Conclure en donnant un algorithme permettant de construire une telle priorité* p *et un ordonnancement de durée minimale.*