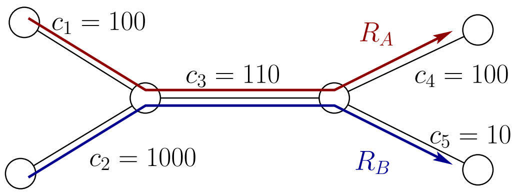
Congestion dans les réseaux

1 Nécessité du contrôle de congestion



On considère un réseau sans contrôle de congestion, où chaque routeur possède une file d'attente FIFO pour les paquets qu'il doit retransmettre. On supposera que la taille cette file d'attente n'est pas bornée. Si deux routes empruntent le même lien et que leur demande excède la capacité de ce lien, chacun se verra attribuer une fraction de la bande passante disponible proportionnelle à sa demande (= le taux auquel il place des paquets dans la file d'attente).

Question 1.1. *Deux routes se partagent les ressources du réseau représenté ci-dessus (les c_i sont les capacités des liens). Calculer le débit attribué à chaque route sur chacun des liens du réseau.*

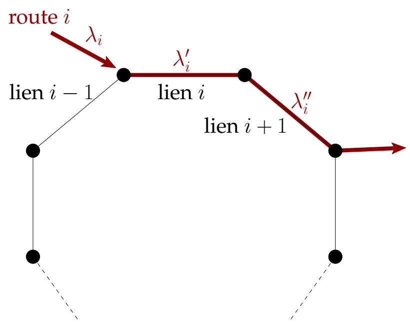
Correction Sur leur premier lien, chacun des flux émettent à capacité maximale : 100 messages/unité de temps pour la route A, 1000 pour la route B. B place donc 10 messages pendant que A place 1 message dans la file d'attente du nœud commun de gauche. Donc dans le lien 3, 10/11 de la capacité est allouée à la route B, et 1/11 à la route A : sur le lien 3, A a donc un débit de 10 alors que B a un débit de 100. Puis sur les liens 4 et 5, il n'y a plus de congestion. Sur le lien 4, toute la capacité est dévolue à la route A, qui arrive avec un débit 10, elle garde donc un débit 10 sur le lien 4. Sur le lien 5, la capacité est limitée à 10 pour un débit de paquets arrivant à 100 : le débit de la route B sur le lien 5 est donc 10.

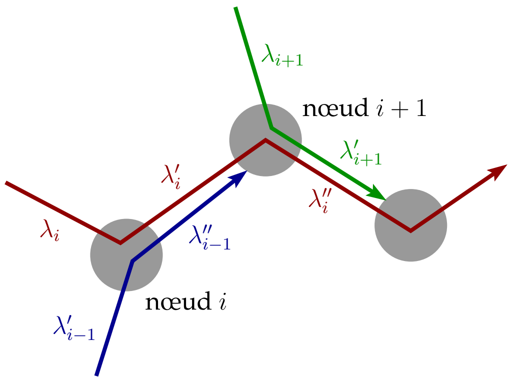
Au final, on a bien mal utilisé la capacité du réseau : chaque flux a un débit de 10 à destination, alors que le débit de la route A peut être augmenté à 100 sans défavoriser la route B. De plus, les files d'attente aux nœuds intermédiaires ne sont pas bornée, et leur taille croît linéairement avec le temps. □

On considère le réseau en anneau représenté ci-dessous, composé de n machines, reliées par des liens de capacités c_i. Les ressources de communication sont partagées entre n routes définies de la façon suivante : la route i entre par le nœud i, utilise les liens i et $i+1$, et ressort par le nœud $i+2$ (modulo n). On note λ_i le taux d'émission de la source de la route i, λ'_i le taux attribué à cette route sur le lien i et λ''_i celui sur le lien $i+1$.

Question 1.2. *Exprimer λ'_i et λ''_i et fonction des autres valeurs.*

Question 1.3. *On se place dans le cas homogène, avec $\lambda_i = \lambda$ et $c_i = c$ pour tout i. Calculer λ'_i et λ''_i en fonction de λ et c. Quel est le comportement du réseau quand la demande λ est grande ?*
NB : *On pourra utiliser le développement limité $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 - u^2/8 + o(u^2)$.*





Correction La fraction de débit attribuée à un flux dépend toujours du taux d'arrivée de ses paquets au nœud émetteur. Tous les indices dans ce qui suit s'entendent « modulo n ». Pour calculer λ'_i on se place en i : les flux i et $i-1$ se partagent les ressources du lien i, on a donc :

$$\lambda'_i = \min\left\{\frac{\lambda_i c_i}{\lambda_i + \lambda'_{i-1}}, \lambda_i\right\}$$

Pour calculer λ''_i on se place au nœud $i+1$: les flux i et $i+1$ se partagent les ressources du lien $i+1$, on a donc :

$$\lambda''_i = \min\left\{\frac{\lambda'_i c_{i+1}}{\lambda_{i+1} + \lambda'_i}, \lambda'_i\right\}$$

Dans le cas homogène, on a $\lambda_i = \lambda$ et $c_i = c$ pour tout i. Donc par symétrie, il existe des valeurs λ' et λ'' telles que $\lambda'_i = \lambda'$ et $\lambda''_i = \lambda''$ pour tout i. On se place dans le cas de la congestion, donc :

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\lambda c}{\lambda + \lambda'} \\ \lambda'' &= \frac{\lambda' c}{\lambda + \lambda'} \end{aligned}$$

De la première équation, on calcule λ' (binôme du second degré) :

$$\lambda' = \frac{\lambda}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 4\frac{c}{\lambda}}\right)$$

En remplaçant λ' par la formule ci-dessus dans l'expression de λ'', puis en multipliant dénominateur et numérateur par $(-1 + \sqrt{1 + 4c/\lambda})$, on obtient :

$$\lambda'' = c - \frac{\lambda}{2}\left(\sqrt{1 + 4\frac{c}{\lambda}} - 1\right)$$

Puis en utilisant le développement limité proposé

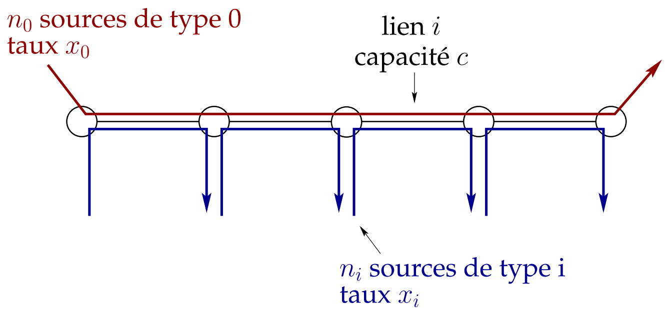
$$\lambda'' = \frac{c^2}{\lambda} + o(\frac{1}{\lambda})$$

Ainsi, lorsque le débit λ des flux arrivant augmente, le débit utile (λ'') diminue, jusqu'à tendre vers 0. □

Pour éviter ce comportement (ainsi que les problèmes de taille de file d'attente), on met en place un contrôle de congestion, qui affecte à chaque route un taux d'émission : chaque source émet au débit qu'on lui a fixé, et non plus à sa capacité maximale.

2 Équité Max-Min (*max-min fairness*)

On considère le réseau linéaire suivant :



Question 2.1. *Quelle allocation maximise le débit total (la somme des débits) ? Est-elle acceptable ?*

Correction $x_0 = 0$ et $x_i = c/n_i$ pour $i > 0$. Elle n'est pas acceptable car un ensemble de flux est complètement négligé, il faut une solution plus **équitable**. □

Question 2.2. *Quelle solution plus équitable proposez-vous lorsque $n_i = 1$ pour tout i ? Et dans le cas général ?*

Correction Plusieurs allocations peuvent convenir avec $n_i = 1$, comme par exemple :

(a) $x_0 = x_i = c/2$

(b) $x_0 = 1/N$ et pour $i > 0, x_i = (N-1)/N$, où N est le nombre de liens : on privilégie ainsi les flux court

Pour le cas des n_i quelconques, la solution (a) peut se généraliser comme suit :

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{c}{n_i + n_0} & \text{pour } i > 0 \\ x_0 = \min\limits_{i=1\ldots N} \left\{ \dfrac{c}{n_i + n_0} \right\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Mais cette solution laisse des ressources inutilisées, il faut alors rafiner les $x_i, i > 0$:

$$x_i = \max \left\{ \frac{c}{n_i + n_0}, \frac{c - x_0}{n_i} \right\}$$

□

On considère un ensemble de liens $l_1 \ldots, l_L$ et un ensemble de routes $r_1, \ldots r_R$. On note $l \in r$ lorsque la route r emprunte le lien l. Une allocation x affecte un taux x_r à chaque route. Une allocation *réalisable* doit vérifier :

$$\forall l, \qquad \sum_{r \ni l} x_r \leqslant c_l$$

Définition 1. Une allocation x est dite *max-min équitable* si et seulement si on ne peut augmenter le taux alloué à une route qu'au prix d'une diminution d'un taux déjà inférieur. Formellement, pour toute autre allocation réalisable y, si $y_r > x_r$ pour une route r, alors il existe une route r' telle que $y_{r'} < x_{r'}$ et $x_{r'} \leqslant x_r$.

Question 2.3. *Donner une allocation max-min équitable pour le réseau linéaire précédent.*

Correction C'est l'allocation (a) proposée ci-dessus. □

Définition 2. En utilisant le modèle de réseau précédent, on dit qu'un lien l est un **goulet d'étranglement** pour la route r si et seulement si
- le lien l est saturé : $\sum_{r=1}^{R} A_{l,r}x_r = c_l$
- la route r a le taux maximum parmi toutes les routes utilisant ce lien : $x_r \geqslant x_{r'}$ pour tout r' tel que $A_{l,r'} > 0$.

Question 2.4. *Montrer qu'une allocation est max-min équitable si et seulement si chaque route a un goulet d'étranglement.*

Correction
- Soit x une allocation max-min équitable, supposons qu'une route r n'a pas de goulet d'étranglement dans x. Deux cas sont possible :
  1. Pour tout lien l emprunté par r, l n'est pas saturé. Alors créer une allocation y telle que $y_r = x_r + \epsilon$ et $y_{r'} = x_{r'}$ pour $r' \neq r$. y est réalisable et contredit la max-min équité de x.
  2. Soit L l'ensemble des liens saturés empruntés par r. Comme r n'a pas de goulet d'étranglement, pour tout $l \in L$, x_r n'est pas maximal sur l (i.e. il existe une autre route $r' \ni l$ telle que $x_{r'} > x_r$). On constuit l'allocation y comme suit :
     - $y_r = x_r + \epsilon$
     - pour tout lien $l \in L$, pour toute route
     - pour toute route r' telle que $r' \ni l$ telle que $x_{r'} > x_r$, $y_{r'} = x_{r'} - \epsilon$
     - pour les autres routes r'' : $y_{r''} = x_{r''}$

     y est réalisable et contredit la max-min équité de x.
- Soit x une allocation, telle que chaque route à un goulet d'étranglement dans x, montrons que x est max-min équitable. Pour ceci on considère une autre allocation y réalisable avec $y_r > x_r$ pour une certaine route r. Sur le goulet d'étranglement l de r, la capacité attribuée aux autres routes est strictement plus faible avec y qu'avec x. Donc il existe $r' \ni l$ telle que $y_{r'} < x_{r'}$. Comme $l \in r'$ et l est le goulet d'étranglement de x, on a aussi $x_r \geqslant x_{r'}$. Donc x est max-min équitable.

□

Question 2.5. *Montrer qu'il n'existe qu'une seule allocation max-min équitable.*

Correction Soient x et y deux allocations max-min équitables, et r une route où elles diffèrent. On considère sans perte de généralité que $y_r > x_r$. Comme x est max-min équitable, il existe r' avec $y_{r'} < x_{r'}$ et $x_{r'} \leqslant x_r$. Comme y est max-min équitable et que $y_{r'} < x_{r'}$, il existe r'' avec $x_{r''} < y_{r''}$ et $y_{r''} \leqslant y_{r'}$. On note $u_0 = r$, $v_1 = r'$ et $u_1 = r''$. On a $y_{r''} < y_{r'} < y_r$, soit

$$y_{u_1} < y_{v_1} < y_{u_0}.$$

On reconstruit sur le même principe deux autres routes s' et s'' en partant de $s = r''$. On note $u_2 = s''$ et $v_2 = s'$ et on a

$$y_{u_2} < y_{v_2} < y_{u_1}.$$

On peut donc construire deux suites u et v de routes toute distinces (car de taux strictement différents selon l'allocation y). Or le nombre de routes est borné, ce qui est contradiction avec ces ensembles infinis de routes. □

Question 2.6. *Donner un algorithme calculant la solution max-min équitable.*

Correction La méthode la plus intuitive consiste à faire croitre une allocation x en partant de $x_r = 0$ pour toute route. Dès qu'un lien est saturé, il devient le goulet d'étranglement pour les routes qui le traversent, qui ne peuvent plus augmenter leur taux. On continue à augmenter les routes qui ne sont toujours pas saturées, etc.

Plus formellement, on peut utiliser l'algorithme suivant, basé sur une fonction d'utilité des liens :

$$U(l) = \frac{1}{c_l} \sum_{r \ni l} A_{l,r}$$

Pour $A_{l,r} = 0$ ou 1, $U(l)$ est simplement le nombre de routes traversant un lien l divisé par sa capacité. On commence par étudier le lien l tel que $U(l)$ est maximal (celui qui est remplie le plus rapidement par la méthode précédente, en quelque sorte le goulet le plus limitant de tout le réseau). On alloue alors les capacités du lien l équitablement entre les routes qui passent par l, puis on recommence.

Tant qu'il reste des routes à traiter.

1. Calculer $U(l)$ pour chaque lien,
2. Trouver les liens qui ont le plus grand $U(l)$. On note $\mathcal{L}_1$ cet ensemble de liens.
3. Pour chaque route r empruntant au moins un de ces liens, on calcule le taux alloué à cette route, puis on les supprime des routes à traiter. Plus formellement :

$$\mathcal{R}_1 = \{r \in \mathcal{R} | r \cap \mathcal{L}_1 \neq \emptyset\}$$

$$\forall r \in \mathcal{R}_1, \quad \lambda_r = \min_{l \in \mathcal{L}_1 \cap r} \left\{ A_{l,r} \sum_{r' \ni l} A_{l,r'} c_l \right\}$$

On met à jour les capacités des liens, en supprimant les ressources utilisées :

$$\forall l \in \mathcal{L} \quad c_l{}' = c_l - \sum_{r \ni l} \lambda_r$$

(ainsi $\forall l \in \mathcal{L}_1$, $c_l{}' = 0$)

Plus de précisions : voir le rapport de recherche LIP RR2002-04 (`ftp://ftp.ens-lyon.fr/pub/LIP/Rapports/RR/RR2002/RR2002-40.ps.gz`). □

3 Généralisation à d'autres formes d'équités

Le débit total obtenu en appliquant l'équité max-min sur le réseau de l'exercice est assez faible en comparaison du débit total qu'on peut obtenir. Pour éviter un tel "gaspillage" de ressources, d'autres formes d'équités ont été définies, qui prennent en compte l'utilisation du réseau par les différentes routes.

On introduit le critère d'équité généralisé de Mo et Walrand :

$$\text{MAXIMIZE } g_\alpha(x) = \sum_r w_r f_\alpha(x_r) \text{ avec } f_\alpha(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

On donne aussi une définition de l'équité basée sur la comparaison entre une allocation optimale et tout autre allocation réalisable :

Définition 3. Une allocation réalisable x^* est dite (p, α)-proportionnelle si pour toute autre allocation réalisable x, on a :

$$\sum_r w_r \frac{x_r - x_r^*}{(x_r^*)^\alpha} \leqslant 0$$

Question 3.1. *Montrer qu'une solution (p, α)-proportionnelle maximise g_α.*

Correction C'est le sens le plus simple du Lemme 2 du papier de Mo et Walrand (deuxième colonne, en haut, page 4). En simplifiant la notation g_α en g, on peut développer g à l'ordre 2 :

$$g(x) = g(x^*) + \nabla g(x^*)^T(x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T \nabla^2 g(x^*)(x - x^*) + o(||x - x^*||^2)$$

NB : $\nabla f(x, y, z) = \overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{z}$.
D'où $\nabla g = \sum_r \frac{\partial g}{\partial x_r}\vec{r}$ et

$$\nabla g(x - x^*) = \sum_r \frac{\partial g}{\partial x_r}(x_r - x_r^*)$$

On a $\frac{\partial g}{\partial x_r} = \frac{w_r}{(x_r)^\alpha}$ (quelque soit α), donc

$$\nabla g(x^*)^T(x - x^*) = \sum_r w_r \frac{x_r - x_r^*}{(x_r^*)^\alpha} \leqslant 0$$

pour toute allocation réalisable x. On peut aussi montrer que le troisième terme est strictement négatif, car $\nabla^2 g(x^*)$ est définie négative (matrice diagonale dont les éléments sont des $-\alpha w_r / x_r^{\alpha+1}$). Ainsi x^* est un maximum local. On admet qu'il n'y a pas d'autres maxima, ainsi x^* maximise g.
□

Deux cas particuliers de cette généralisation sont souvent utilisés :
- le cas $\alpha = 1$ correspond à ce qu'on appelle généralement l'équité proportionnelle (*proportionnal fairness*)
- le cas $\alpha = 2$, appelé minimisation de délai.

Question 3.2. *Pourquoi a-t'on choisi cette appellation pour $\alpha = 2$? Calculer les allocations correspondant à ces deux cas pour l'exemple précédent du réseau linéaire.*

Correction Pour $\alpha = 2$, si on suppose que toutes les routes correspondent à des transferts de fichier de même taille, cela revient à minimiser la somme des temps de complétion de ces transferts.

On pourrait aussi considérer le cas $\alpha \to \infty$, qui revient à l'équité MAX-MIN (il me semble, à démontrer). On a ainsi mis en évidence une continuité entre toutes les formes d'équité. □

Sources et références

[1] J.-Y. Le Boudec. TCP/IP Networking. http://icawww1.epfl.ch/cn2/0607/.

[2] Laurent Massoulié and James Roberts. Bandwidth sharing and admission control for elastic traffic. *Telecommunication Systems*, 15(1-2) :185–201, 2000.

[3] Jeonghoon Mo and Jean C. Walrand. Fair end-to-end window-based congestion control. *IEEE/ACM Trans. Netw.*, 8(5) :556–567, 2000.