Résolution de récurrences et sommation

Bruno Salvy

INRIA

Formes closes pour les suites

$\mathbb{K}$ corps

- polynômes ($u(n) \in \overline{\mathbb{K}}[n]$) ;
- fractions rationnelles ($u(n) \in \overline{\mathbb{K}}(n)$) ;
- suites géométriques ($u(n+1)/u(n) \in \overline{\mathbb{K}}$) ;
- suites hypergéométriques ($u(n+1)/u(n) \in \overline{\mathbb{K}}(n)$) ;
- suites d'Alembertiennes.

Toutes sont solutions de récurrences linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}[n]$.

Suites hypergéométriques

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \in \mathbb{K}(n).$$

Exemples :

- c^n ;
- $n!$;
- forme générale : $K c^n \dfrac{\prod (n+a_i)!}{\prod (n+b_j)!}$.

Exemples d'identités

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \frac{13k+5}{3(k+1)} \left(\frac{4}{3}\right)^{k} = \binom{2n}{n} \left(\frac{4}{3}\right)^{n} - 1,$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2k}{k}} 4^k = \frac{1}{1-2n},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n},$$

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

Algorithmes et utilisation

$$a_k(n)u_{n+k} + \cdots + a_0(n)u_n = 0$$

On peut

- trouver les solutions sous forme close ;
- prouver qu'il n'en existe pas.

Les formes closes servent à

- avoir des “jolies” formules ;
- faire de l'asymptotique direct (sauf pour les suites d'Alembertiennes) ;
- prouver des propriétés de divisibilité.

Elles ne servent pas à évaluer la suite en un point.

I. Récurrences linéaires à coefficients constants

Fonctions génératrices

Définition. La série formelle

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

est appelée *série génératrice* de la suite $\{f_n\}$.

Les propriétés de F et de $\{f_n\}$ sont étroitement liées.

Rappel : coefficients constants

Propriété. Une suite $\{u_n\}$ satisfait une récurrence linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ ssi sa série génératrice est rationnelle

$$\sum_{n\geq 0} u_n z^n \in \mathbb{K}(z).$$

Le dénominateur est le polynôme réciproque du polynôme caractéristique de la récurrence.

Forme close : développer en éléments simples et extraire les coefficients.

$$P_1(n)\lambda_1^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n.$$

Propriétés de clôture

u_n, v_n suites récurrentes linéaires à coefficients constants

$$\lambda u_n + \mu v_n, \quad u_n \cdot v_n, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Exemple : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} F_k^{10}$

Environ 13% des suites de la nature.

II. Solutions rationnelles et sommation indéfinie

Solutions polynomiales

$$a_k(n)u_{n+k} + \cdots + a_0(n)u_n = b(n), \qquad a_i(n) \in \mathbb{K}[n].$$

$$u_n \in \mathbb{K}[n] \Longrightarrow b(n) \in \mathbb{K}[n].$$

Algorithme 1 : borne sur le degré, coefficients indéterminés.

Cas du degré élevé

Algorithme de Abramov-Bronstein-Petkovšek

$$(R) \qquad a_k(n)u_{n+k} + \cdots + a_0(n)u_n = b(n).$$

Deux propriétés des coefficients binomiaux :

$$n\binom{n-\alpha}{k} = (k+1)\binom{n-\alpha}{k+1} + (k+\alpha)\binom{n-\alpha}{k},$$

$$\binom{n+1-\alpha}{k} = \binom{n-\alpha}{k} + \binom{n-\alpha}{k-1}.$$

$\Rightarrow$ si $u_n = \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{n-\alpha}{k}$, (R) induit une récurrence linéaire sur les c_k.

Algorithme. Trouver une borne sur d, utiliser la récurrence en descendant (les conditions initiales sont nulles).

Choix de α : $a_k(n+\alpha) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Solutions rationnelles (Abramov)

$$a_k(n)u_{n+k} + \cdots + a_0(n)u_n = b(n), \qquad a_i(n) \in \mathbb{K}[n].$$

$$u_n \in \mathbb{K}(n) \Longrightarrow b(n) \in \mathbb{K}(n).$$

$$u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}, \qquad P \wedge Q = 1.$$

On cherche un multiple de Q.

Racines les plus "à droite" $\leftrightarrow a_0(n)$

"à gauche" $\leftrightarrow a_k(n-k)$.

$A := a_k(n-k); B := a_0(n);$

$N := \max\{i \in \mathbb{N}, A(n) \wedge B(n+i) \neq 1\};$

$Q := 1;$

For i from N by -1 to 0 do

$s := A(n) \wedge B(n+i);$

$A := A(n)/s(n); B := B(n)/s(n-i);$

$$R := R \times \prod_{j=0}^{i} s(n-j)$$

od

Sommation indéfinie

Algorithme d'Abramov

$$S_n = \sum^{n-1} u_n$$

u_n suite hypergéométrique donnée.
Probème : si S_n est hypergéométrique, le trouver.

$$S_{n+1} - S_n = u_n \quad \Longrightarrow \quad f_n = S_n/u_n \in \mathbb{K}(n)$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} f_{n+1} - f_n = 1.$$

Chercher les solutions rationnelles.

Lemme de Gosper

Lemme. Soit $F \in \mathbb{K}(n)$, alors existent A, B, C dans $\mathbb{K}[n]$ tels que

$$F(n) = \frac{A(n)}{B(n)} \frac{C(n+1)}{C(n)},$$

$$A(n) \wedge C(n) = 1, \quad B(n) \wedge C(n+1) = 1, \quad A(n) \wedge B(n+k) = 1, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Exemple. $\dfrac{n+5}{n(2n+1)} = \dfrac{1}{2n+1} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$

Algorithme de Gosper

$$F(n) = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$A(n)C(n+1)f_{n+1} - B(n)C(n)f_n = B(n)C(n)$$

Théorème. [Gosper] $C(n)$ est un multiple du dénominateur de f_n.

Preuve. $f_n = P(n)/[C(n)Q(n)]$, $P \wedge Q = 1$.

$$A(n)\frac{P(n+1)}{Q(n+1)} - B(n)\frac{P(n)}{Q(n)} = B(n)C(n).$$

$$\begin{aligned} Q(n) &\mid B(n)Q(n+1) \\ Q(n+1) &\mid A(n)Q(n) \\ \Rightarrow Q(n) &\mid A(n-1)Q(n-1) \\ \Rightarrow Q(n) &\mid Q(n-1) \wedge Q(n+1) \\ &\Longrightarrow \deg Q = 0. \end{aligned}$$

III. Solutions hypergéométriques

Algorithme de Petkovšek

$$(R) \qquad Lu_n = a_k(n)u_{n+k} + \cdots + a_0(n)u_n = 0, \quad a_i(n) \in \mathbb{K}[n].$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{A(n)}{B(n)} \frac{C(n+1)}{C(n)},$$

$$\begin{gathered}
a_k(n)A(n+k)\cdots A(n)C(n+k) + \\
a_{k-1}(n)B(n+k)A(n+k-1)\cdots A(n)C(n+k-1) \\
+ \cdots + a_0(n)B(n+k)\cdots B(n)C(n) = 0.
\end{gathered}$$

$$\Longrightarrow A(n)|a_0(n), \qquad B(n+k)|a_k(n).$$

Algorithme. Pour *toutes* les paires de facteurs, chercher une solution polynomiale de (R).

Similarité et cas inhomogène

$$Lu_n = F(n)$$

$$\{u_n\} \text{ hypergéométrique} \Rightarrow Lu_n = f(n)u_n, \quad f \in \mathbb{K}(n).$$

- Si $F(n)$ est hypergéométrique, il suffit de chercher des solutions rationnelles ;
- si $F(n)$ est combinaison linéaire d'hypergéométriques, idem.

Solutions d'Alembertiennes

Une fois $u_n = h(n)$ trouvé, on pose

$$u_n = h(n) \sum^{n-1} v_k.$$

Théorème. [Petkovšek] Si une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux admet des solutions d'Alembertiennes, c'est-à-dire de la forme

$$h_0(n) \sum_{k_1=s_1}^{n-1} h_1(k_1) \sum_{k_2=s_2}^{k_1-1} h_2(k_2) \cdots \sum_{k_m=s_m}^{k_{m-1}-1} h_m(k_m),$$

où les h_i sont hypergéométriques, alors ces solutions sont trouvées par recherche des solutions hypergéométriques et réduction de l'ordre.

III. Sommation définie

Fonctions hypergéométriques

$$
{}_pF_q\left(\left.\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}\right| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_m} \frac{z^n}{n!},
$$

$$
(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1).
$$

Fonctions génératrices des suites hypergéométriques.

Nombreux cas particuliers.

Algorithme pour $\sum_{n\geq 0} u_n$: tester si u_n est hypergéométrique, et si oui renvoyer la valeur correspondante de la fonction hypergéométrique.

Creative telescoping

L'algorithme rapide de Zeilberger

$$S_n = \sum_k F_{n,k}$$

$$\frac{F_{n+1,k}}{F_{n,k}} \in \mathbb{K}(n,k), \qquad \frac{F_{n,k+1}}{F_{n,k}} \in \mathbb{K}(n,k).$$

On cherche une récurrence

$$a_p(n)S_{n+p} + \cdots + a_0(n)S_n = 0.$$

Idée : on cherche simultanément des a_i et un G tels que

$$a_p(n)F_{n+p,k} + \cdots + a_0(n)F_{n,k} = G_{n,k+1} - G_{n,k}.$$

Si les a_i sont connus et G est hypergéométrique l'algorithme de Gosper trouve G.

Algorithme de Gosper étendu [Zeilberger] : p fixé, on cherche simultanément les a_i et $G \to$ système de récurrences linéaires pour les a_i.

Exemple

$$f_n = \sum_k (-1)^k \binom{2n}{k}^3,$$

$$(n+1)^2 F(n+1,k) + 3(3n+2)(3n+1)F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k),$$

$$(n+2)^2 f_{n+1} + 3(3n+2)(3n+1) f_n = 0,$$

$$f_n = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$