Systèmes de récurrences

et d'équations différentielles linéaires

Bruno Salvy

INRIA

Exemple : coefficients binomiaux

$$u_{n,k} = \binom{n}{k}$$

$$S_n \cdot u_{n,k} = u_{n+1,k}, \qquad S_k \cdot u_{n,k} = u_{n,k+1}$$

$$(n+1-k)S_n \cdot u_{n,k} - (n+1)u_{n,k} = 0 = [(n+1-k)S_n - (n+1)I] \cdot u_{n,k} =: p \cdot u_n$$

$$(k+1)S_k \cdot u_{n,k} - (n-k)u_{n,k} = 0 = [(k+1)S_k - (n-k)I] \cdot u_{n,k} =: q \cdot u_{n,k}$$

Triangle de Pascal : $u_{n+1,k+1} = u_{n,k} + u_{n,k+1}$.

$$S_n S_k - S_k - I = \frac{1}{n-k} p + q.$$

Sommation sur k :

$$S_n S_k - S_k - I = (S_k - I)(S_n - I) + S_n - 2I \Longrightarrow v_{n+1} = 2v_n, \quad v_n = \sum_k u_{n,k}.$$

Motivation : quelques identités

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1} (H_{m+1} - \frac{1}{m+1}),$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{-px} T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \pi(-1)^n I_n(p),$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k} \right)^3 = \frac{n}{2} 8^n + 8^n - \frac{3n}{4} 2^n \binom{2n}{n}.$$

I. Idéaux d'opérateurs

Opérateurs

Définition. On appelle *anneaux d'opérateurs linéaires différentiels aux différences* les anneaux de polynômes non-commutatifs

$$\mathbb{A}[S_{n_1}, \ldots, S_{n_p}, D_{z_1}, \ldots, D_{z_q}],$$

où $\mathbb{A} = \mathbb{K}[n_1, \ldots, n_p, z_1, \ldots, z_q]$
ou $\mathbb{A} = \mathbb{K}(n_1, \ldots, n_p, z_1, \ldots, z_q)$.

Les relations de commutation

$$S_{n_i} S_{n_j} = S_{n_j} S_{n_i}, D_{z_i} D_{z_j} = D_{z_j} D_{z_i}, S_{n_i} D_{z_j} = D_{z_j} S_{n_i},$$
$$S_{n_i} n_j = (n_j + \delta_{ij}) S_{n_i}, D_{z_i} z_j = z_j D_{z_i} + \delta_{ij} I$$

permettent de récrire tout opérateur linéaire différentiel aux différences comme combinaison linéaire de monômes en $S_{n_1}, \ldots, S_{n_p}, D_{z_1}, \ldots, D_{z_q}$ à coefficients dans $\mathbb{A}$.

Idéaux

Définition. Un *idéal à gauche* de $\mathbb{O} = \mathbb{A}[S_{n_1}, \ldots, S_{n_p}, D_{z_1}, \ldots, D_{z_q}]$ est un sous-ensemble $\mathcal{I}$ de $\mathbb{O}$ tel que

$$x \in \mathcal{I}, y \in \mathcal{I}, c \in \mathbb{O} \Longrightarrow x + y \in \mathcal{I}, \quad cx \in \mathcal{I}.$$

Théorème. Les bases de Gröbner d'idéaux à gauche de $\mathbb{O}$ sont finies et se calculent par l'algorithme de Buchberger.

Dans la suite, tous les idéaux sont à gauche.

Applications

1. Test d'appartenance à un idéal ;
2. réduction à une forme normale ;
3. élimination.

Exemple d'appartenance à un idéal $\binom{n}{k}$

$$\{p, q\} := \{S_n - \frac{n+1}{n+1-k} I, S_k - \frac{n-k}{k+1} I\}$$

est une base de Gröbner dans $\mathbb{Q}(n,k)[S_n, S_k]$ pour l'ordre $S_n > S_k$. Vérification :

$$\begin{aligned} S_k p - S_n q &= -\frac{n+1}{n-k} S_k + \frac{n+1-k}{k+1} S_n, \\ &= -\frac{n+1}{n-k}\frac{n-k}{k+1} + \frac{n+1-k}{k+1}\frac{n+1}{n+1-k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Triangle de Pascal par réduction de $r = S_k S_n - S_k - I$:

$$r - S_k p = \left(\frac{n+1}{n-k} - 1\right) S_k - I = \frac{k+1}{n-k} S_k - I,$$

$$r - S_k p - \frac{k+1}{n-k} q = 0.$$

Exemple d'appartenance à un idéal

Polynômes de Legendre

Système dans $\mathbb{Q}(n, z)[S_n, D_z]$:

$$\{p, q, r\} := \{(n+2)S_n^2 - (2n+3)zS_n + (n+1)I,$$

$$(1-z^2)S_nD_z + (n+1)zS_n - (n+1)I, (1-z^2)D_z^2 - 2zD_z + n(n+1)I\}.$$

Base de Gröbner $(D_z > S_n)$ de l'idéal engendré par $\{p, q\}$:

$$\{p, s\}, \qquad s = (1-z^2)D_z + (n+1)S_n - z(n+1)I.$$

r appartient à l'idéal engendré par $\{p, q\}$ se vérifie par réduction.

De même, p appartient à l'idéal engendré par $\{q, r\}$.

Exemple d'élimination

Fonction hypergéométrique

$$f = {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\right| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Calcul dans l'anneau $\mathbb{Q}(a,b,c,z)[S_a, D_z]$.

- $u_{n+1}/u_n \in \mathbb{Q}(a,b,c,n) \longrightarrow$ polynôme p de degré 2 en D_z annulant f ;
- $au_n(a+1) - (a+n)u_n(a) = 0$ donne

$$a \sum_{n=0}^{\infty} u_n(a+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a+n) u_n z^n$$

ou encore $q = aS_a - aI + D_z/z$ annule f ;

- élimination de D_z entre p et q

$$P(a,z)S_a^2 + Q(a,z)S_a + R(a,z)I.$$

Relation de contiguité

II. ∂-finitude

Définition

$$\mathbb{O} = \mathbb{A}[S_{n_1}, \ldots, S_{n_p}, D_{z_1}, \ldots, D_{z_q}], \qquad \mathbb{A} = \mathbb{K}(n_1, \ldots, n_p, z_1, \ldots, z_q).$$

Définition. Un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathbb{O}$ est ∂-*fini* lorsque le quotient $\mathbb{O}/\mathcal{I}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{A}$.

Exemples

– tout opérateur différentiel linéaire de $\mathbb{K}(z)[D_z]$ engendre un idéal ∂-fini ; la dimension est l'ordre de l'opérateur ;

– toute récurrence linéaire de $\mathbb{K}(n)[S_n]$;

– les suites hypergéométriques sont annulées par des récurrences pour lesquelles le quotient est de dimension 1 ;

– l'idéal engendré par $\{p, q, r\}$ annulant les polynômes de Legendre ; la dimension est 2.

Intérêt : la réduction ramène les calculs à de l'algèbre linéaire.

Exemple

Fonction hypergéométrique

$$f = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| \, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

On veut calculer $S_a^{-1} \cdot f$.

– l'idéal engendré par $\{p, q\}$ est ∂-fini. Dimension du quotient 2 ;

– tout polynôme de $\mathbb{Q}(a, b, c, z)[S_a, D_z]$ peut se récrire $AD_z + B_i$ avec $A, B \in \mathbb{Q}(a, b, c, z)$;

– S_a^{-1} est égal à un tel polynôme (Bézout non-commutatif) ;

– $\rightarrow$ coefficients indéterminés.

Sommation indéfinie

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = ?$$

On travaille dans $\mathbb{Q}(m,k)[S_k]$.

1. Propriétés de clôture $\rightarrow$

$$(k-m+1)(k-m+2)u_{k+2} - (2k+3)(k-m+1)u_{k+1} + (k+1)^2 u_k = 0$$

base : $\{I, S_k\}$.

2. On cherche $v_k = (A_k S_k + B_k I) \cdot u_k$, $A, B \in \mathbb{Q}(m,k)$ tel que $v_{k+1} - v_k = u_{k+1}$.

3. Réduction :

$$\begin{aligned}(S_k - I)(A_k S_k + B_k I) - S_k &= A_{k+1} S_k^2 + (B_k - A_k - 1) S_k - B_k I \\ &= (B_k - A_k + A_{k+1} \frac{2k+3}{k-m+2} - 1) S_k \\ &\qquad - (B_k + A_{k+1} \frac{(k+1)^2}{(k-m+1)(k-m+2)}) I\end{aligned}$$

4. Découplage $\rightarrow$ une équation linéaire pour A, on cherche les solutions rationnelles (Abramov).

5. Conclusion :

$$A_k = -\frac{(k-m)(k-m+1)}{(m+1)^2}, \qquad B_k = \frac{(k+1)^2}{(m+1)^2}$$

$$v_n = \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right).$$

Propriétés de clôture

$$\mathbb{O} = \mathbb{A}[S_{n_1}, \ldots, S_{n_p}, D_{z_1}, \ldots, D_{z_q}], \qquad \mathbb{A} = \mathbb{K}(n_1, \ldots, n_p, z_1, \ldots, z_q).$$

Théorème. Si f et g sont annulées par des idéaux ∂-finis de $\mathbb{O}$, alors il en va de même de $f + g$, fg, $S_{n_i} f$, $D_{z_i} f$.

Preuve : comme en une variable, tout se passe dans des espaces vectoriels de dimension finie.

III. Creative telescoping

Principe

On cherche des opérateurs annulant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n_1,\dots,n_p}(z_1,\dots,z_q)\,dz_q, \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n_p=-\infty}^{\infty} f_{n_1,\dots,n_p}(z_1,\dots,z_q)$$

connaissant des opérateurs annulant f, dans le cas où

$$S_{n_1}^{\alpha_1}\cdots S_{n_p}^{\alpha_p} D_{z_1}^{\beta_1}\cdots D_{z_q}^{\beta_q} n_1^{\gamma_1}\cdots z_q^{\delta_q} f$$

est nul “aux bords” pour tout monôme en $n_1,\dots,D_{z_q}$.

Idée : trouver des opérateurs P et Q de $\mathbb{O}$ annulant f

$$P + D_{z_q} Q \qquad \text{ou} \qquad P + (S_{n_p} - 1)Q$$

tels que P ne dépende pas de z_q (resp. n_p) ; puis intégrer (resp. sommer).

Exemples

– Binomiaux $\to \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

–

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(zt)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

$$f = \cos(zt)/\sqrt{1-t^2}, \qquad \mathbb{O} = \mathbb{Q}(z)[t][D_z, D_t].$$

$$\{p, q\} = \{D_z^2 + t^2 I, t(t^2-1)D_t + z(1-t^2)D_z + t^2 I\}$$

annulent f.

$$\frac{z}{t^2}p - \frac{D_z}{t^2}q = zD_z^2 + D_z + zI + D_t\left[\frac{1-t^2}{t}D_z\right].$$

Algorithme

Problème : ∂-finitude dans $\mathbb{K}(\dots)[\dots]$, élimination de variables dans $\mathbb{K}[\dots][\dots]$.

Plusieurs algorithmes

- élimination par bases de Gröbner ;
- généralisation de l'algorithme de Zeilberger ;
- autres.

Domaine en cours de recherche