EXERCICES SUR LES SOMMES ET RÉCURRENCES

1. Détailler un algorithme prenant en entrée une fraction rationnelle et renvoyant la décomposition du lemme de Gosper.
2. Deux suites hypergéométriques $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont dites *similaires* lorsque le quotient u_n/v_n est une fraction rationnelle en n. Montrer que si $\{u_n\}$ est une suite hypergéométrique, la suite $\{u_{n+1} - u_n\}$ est similaire à $\{u_n\}$. En déduire que lorsque l'algorithme de Gosper ne renvoie pas de somme ce qui prouve que la somme n'est pas hypergéométrique, alors le résultat ne peut pas non plus être exprimé comme combinaison linéaire d'un nombre fini de suites hypergéométriques.
3. On considère la suite
$$u_n = \binom{2n}{n} a^n,$$
où a est un paramètre. Montrer que u_n n'admet pas de somme indéfinie hypergéométrique, c'est-à-dire telle que $S_{n+1}/S_n \in \mathbb{Q}(n, a)$. Trouver les valeurs de a pour lesquelles u_n admet une somme indéfinie hypergéométrique, c'est-à-dire alors telle que $S_{n+1}/S_n \in \mathbb{Q}(n)$.
4. Exprimer la somme
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)!}$$
à l'aide d'une fonction hypergéométrique.
5. En notant $[x, d]_n$ la quantité
$$[x, d]_n = \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1} (x - jd), & n > 0, \\ 1, & n = 0, \end{cases}$$
on considère la somme
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x, d]_k [y, d]_{n-k}.$$
Exprimer S_n comme une fonction hypergéométrique.
6. Comment cherche-t-on les solutions hypergéométriques de la récurrence
$$(2n+1)u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = \frac{32n^5 + 307n^4 + 1030n^3 + 1459n^2 + 860n + 164}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \binom{2n}{n} \; ?$$