COURS 26

Algorithmes pour les fonctions spéciales dans les algèbres de Ore

Notes de Frédéric Chyzak

1. Algèbres de Ore rationnelles

Une généralisation à plusieurs dérivations et décalages de la notion d'anneau de polynômes tordus du chapitre précédent est donnée par la définition qui suit.

Définition (Algèbre de Ore). *Étant donnés*
- *un corps $k(x) = k(x_1, \dots, x_r)$ de fractions rationnelles,*
- *r morphismes σ_i de ce corps commutant deux à deux,*
- *pour chaque i une σ-dérivation δ_i relative à σ_i, c'est-à-dire pour chaque i un endomorphisme linéaire pour lequel $\delta_i(ab) = \sigma_i(a)\delta_i(b) + \delta_i(a)b$ dès que a et b sont dans $k(x)$, toutes ces σ-dérivations commutant deux à deux et δ_i commutant avec σ_j chaque fois que $i \neq j$,*
- *r indéterminées ∂_i,*

l'algèbre de Ore (rationnelle) notée $k(x_1, \dots, x_r)\langle \partial_1, \dots, \partial_r; \sigma_1, \dots, \sigma_r, \delta_1, \dots, \delta_r\rangle$ ou plus simplement $k(x)\langle\partial; \sigma, \delta\rangle$ est la $k(x)$-algèbre associative engendrée par les ∂_i modulo les relations

$$\partial_i a = \sigma_i(a)\partial_i + \delta_i(a), \qquad \partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i,$$

quand a est dans $k(x)$. On note plus simplement $k(x_1, \dots, x_r)\langle\partial_1, \dots, \partial_r; \sigma_1, \dots, \sigma_r\rangle$ ou encore $k(x)\langle\partial;\sigma\rangle$ le cas où tous les δ_i sont nuls.

Donnons un exemple : en notant x pour m_x et n pour m_n, on vérifie l'existence d'une algèbre de Ore $A = \mathbb{C}(n, x)\langle\partial_n, \partial_x; S_n, I, 0, D_x\rangle$ avec $S_n(n) = n + 1$, $S_n(x) = x$, $D_x(n) = 0$, $D_x(x) = 1$, et plus généralement $S_n(a) = a(n + 1, x)$ et $D_x(a) = da/dx$ quand $a = a(n, x) \in \mathbb{C}(n, x)$.

2. Idéal annulateur

Les éléments des algèbres de Ore représentent des opérateurs linéaires, différentiels, de récurrence, ou autres, et agissent donc sur des fonctions, suites, suites de fonctions, etc. Donnons un exemple qui montre que ces objets sont une bonne représentation polynomiale des opérateurs linéaires, l'exemple de la famille des polynômes orthogonaux de Laguerre qui va nous servir pour toute la suite du chapitre.

Pour chaque paramètre strictement positif α, l'intégrale

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x}\,dx$$

définit un produit scalaire sur les fonctions polynomiales réelles. Par la théorie des polynômes orthogonaux, on déduit l'existence de bases orthogonales échelonnées en degré. On a par exemple la base des polynômes orthogonaux de Laguerre, donnée par

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\alpha+k+1)\cdots(\alpha+n)x^k.$$

On vérifie que ces polynômes vérifient les relations (linéaires)

$$\begin{aligned}(n+2)L_{n+2}^{(\alpha)} - (2n+\alpha+3-x)L_{n+1}^{(\alpha)} + (n+\alpha+1)L_n^{(\alpha)} &= 0,\\ xL_n^{(\alpha)\prime} - (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)} + (n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)} &= 0,\\ xL_n^{(\alpha)\prime\prime} + (\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)\prime} + nL_n^{(\alpha)} &= 0,\end{aligned}$$

avec les conditions initiales $L_0^{(\alpha)} = 1$ et $L_1^{(\alpha)} = \alpha + 1 - x$. Dans l'algèbre de Ore A ci-dessus, ces équations se recodent en les polynômes tordus suivant, qui annulent la suite de fonctions polynomiales $L^{(\alpha)}$:

$$\begin{aligned}p_1 &= (n+2)\partial_n^2 - (2n+\alpha+3-x)\partial_n + (n+\alpha+1),\\ p_2 &= x\partial_x - (n+1)\partial_n + (n+\alpha+1-x),\\ p_3 &= x\partial_x^2 + (\alpha+1-x)\partial_x + n.\end{aligned}$$

Ces trois polynômes engendrent un idéal à gauche dans A, l'idéal annulateur de $L^{(\alpha)}$ dans A. Pour mémoire, un idéal à gauche I d'un anneau R est un sous-ensemble non vide de R stable par addition et par multiplication à gauche par tout élément de R. Cette stabilité reflète le fait que l'addition terme à terme de deux relations linéaires vérifiées par $L^{(\alpha)}$ est une nouvelle relation linéaire vérifiée par $L^{(\alpha)}$, de même qu'en appliquant un opérateur linéaire sur une relation linéaire vérifiée par $L^{(\alpha)}$, on retrouve une relation linéaire vérifiée par $L^{(\alpha)}$.

Exemple 1. Partant de la troisième équation donnée pour caractériser les polynômes de Laguerre, un décalage avant de n et une dérivation par rapport à x donnent respectivement

$$xL_{n+1}^{(\alpha)}{}'' + (\alpha+1-x)L_{n+1}^{(\alpha)}{}' + (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)} = 0$$

et

$$xL_n^{(\alpha)\prime\prime\prime} + (\alpha+2-x)L_n^{(\alpha)\prime\prime} + (n-1)L_n^{(\alpha)\prime} = 0.$$

L'addition de ces deux équations donne l'équation fonctionnelle linéaire

$$xL_n^{(\alpha)\prime\prime\prime} + (\alpha+2-x)L_n^{(\alpha)\prime\prime} + (n-1)L_n^{(\alpha)\prime} + xL_{n+1}^{(\alpha)}{}'' + (\alpha+1-x)L_{n+1}^{(\alpha)}{}' + (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)} = 0,$$

laquelle correspond au polynôme tordu

$$(\partial_x+\partial_n)p_3 = x\partial^3 + (\alpha+2-x)\partial_x^2 + (n-1)\partial_x + x\partial_x^2\partial_n + (\alpha+1-x)\partial_x\partial_n + (n+1)\partial_n.$$

Toute autre famille de polynômes orthogonaux classique se traiterait de la même manière et aurait pu servir de support au cours. La même nature de système linéaire avec une dérivation sur une variable et un décalage sur une autre permet de traiter de la même façon nombre de famille de fonctions spéciales paramétrées, telles les fonctions de Bessel, de Hankel, etc.

3. Bases de Gröbner pour les idéaux à gauche

La propriété essentielle qui fait fonctionner toute la théorie des bases de Gröbner et l'algorithme de Buchberger dans le cadre de polynômes commutatifs est que le monôme de tête d'un produit de polynômes est le produit des monômes de tête des termes du produit. Cette propriété reste vérifiée sur des polynômes non commutatifs sujets aux relations de définition des algèbres de Ore rationnelles, dès lors qu'on considère des ordres monomiaux sur les ∂_i. En refaisant la théorie en s'efforçant de faire toutes les combinaisons linéaires avec des facteurs à gauche, on obtient le résultat suivant (*cf.* le cours sur les bases de Gröbner classiques) :

THÉORÈME. *Soit A une algèbre de Ore rationnelle.*

(i) *Tout idéal à gauche I de A admet pour chaque ordre monomial (admissible) sur les ∂_i une unique base de Gröbner minimale réduite G, au sens où l'une quelconque des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. *la partie stable du monoïde des monômes en les ∂_i engendrée par les monômes de tête des éléments de G est égale celle engendrée par ceux de I ;*
2. *tout f non nul de I est réductible par G ;*
3. *pour tout f dans A, il existe un unique r dans A dont aucun monôme ne soit divisible par un monôme de tête d'un élément de G et tel que $f-r$ soit dans l'idéal I ;*
4. *pour tout f dans I, le reste de la division (à droite) de f par G est nul.*

(ii) *Soit $P = \{p_k\}_{1\leq k\leq r}$ un système de générateurs non nuls d'un idéal à gauche I de A. Tous les S-polynômes* $\operatorname{Spoly}(p_i, p_j)$ *(définis par des combinaisons linéaires à gauche) se réduisent à 0 par P si et seulement si P est une base de Gröbner de l'idéal.*

(iii) *Une variante de l'algorithme de Buchberger termine et renvoie une base de Gröbner de tout idéal à gauche I de A.*

Une différence du cas non commutatif réside dans le calcul des S-polynômes. Dans le cas commutatif, le S-polynôme de deux polynômes non nuls f_1 et f_2 se définit théoriquement par

$$\operatorname{Spoly}(f_1, f_2) = \frac{c_2}{c_1 \wedge c_2}\frac{m_2}{m_1 \wedge m_2} f_1 - \frac{c_1}{c_1 \wedge c_2}\frac{m_1}{m_1 \wedge m_2} f_2,$$

où c_i dénote le coefficient dominant de f_i et m_i son monôme dominant, pour $i = 1, 2$. Cette dernière formule doit être adaptée dans le cas de polynômes tordus : chacun des c_i dénote maintenant le coefficient dominant de

$$\frac{m_{3-i}}{m_1 \wedge m_2} f_i.$$

Plutôt que de poursuivre la théorie dans le détail, montrons le calcul sur un exemple.

En repartant des polynômes p_1 et p_2 qui annulent la suite des polynômes orthogonaux de Laguerre, montrons que le polynôme p_3 s'obtient par élimination de S par un calcul pour l'ordre $\mathsf{lex}(\partial_n, \partial_x)$. Pour cet ordre, le terme de tête de p_1 est $(n+2)\times\partial_n^2$, celui de p_2 est $-(n+1)\times\partial_n$. On calcule donc d'abord le S-polynôme de p_1 et de p_2, sous la forme

$$\operatorname{Spoly}(p_1, p_2) = p_1 + \partial_n p_2 = x\partial_x\partial_n - (n+1)\partial_n + (n+\alpha+1).$$

Remarquons que ce S-polynôme n'est pas $(n+1)p_1 + (n+2)\partial_n p_2$, lequel aurait $(n+2)\partial_n^2$ comme terme dominant, et non pas $\partial_x\partial_n$ pour monôme de tête. Il est réductible par p_2 ; après multiplication par $(n+1)$ et ajout de $x\partial_x p_2$, on obtient

$$x^2\partial_x^2 + (n+\alpha+2-x)x\partial_x - (n+1)^2\partial_n + (n+1)(n+\alpha+1) - x.$$

Ce polynôme a ∂_n pour monôme de tête et est réductible par p_2 ; après retranchement de $(n+1)p_2$, on aboutit à

$$x^2\partial_x^2 + (\alpha+1-x)x\partial_x + nx,$$

qui n'est autre que xp_3. En poursuivant, on montre que les S-polynômes de p_1 et p_2 avec p_3 se réduisent à 0 ; puisque le monôme de tête de p_2, ∂_n, divise celui de p_1, ∂_n^2, une base de Gröbner minimale pour l'ordre $\mathsf{lex}(\partial_n, \partial_x)$ est $\{p_2, p_3\}$.

De façon analogue, une base de Gröbner pour l'ordre $\mathsf{lex}(\partial_x, \partial_n)$ de l'idéal engendré par p_2 et p_3 est $\{p_1, p_2\}$. Les bases de Gröbner permettent de déterminer la redondance du système $\{p_1, p_2, p_3\}$.

Exercice 1. Calculer une base de Gröbner pour l'ordre $\mathsf{lex}(\partial_x, \partial_n)$ de l'idéal engendré par p_2 et p_3 et vérifier le point ci-dessus.

Les polynômes p_1, p_2, p_3 qui annulent la suite des polynômes orthogonaux de Laguerre sont encore plus contraints qu'il n'y paraît jusqu'à présent : p_2 se déduit en fait de p_1. En effet, ne connaissant que p_1, on peut rechercher le polynôme p_2 sous la forme indéterminée

$$p_2 = \partial_x - u(n,x)\partial_n - v(n,x),$$

pour des fractions rationnelles à déterminer u et v, et faire l'hypothèse heuristique que $\{p_1, p_2\}$ est une base de Gröbner pour l'ordre $\mathsf{lex}(\partial_x, \partial_n)$. (Cette hypothèse heuristique est en fait naturelle dès qu'on sait qu'on a affaire à une famille de polynômes orthogonaux.)

Exercice 2 (Presque un problème). Utiliser la théorie des bases de Gröbner pour donner un système de récurrence linéaires sur u et v qui, après résolution, redonne le polynôme p_2. (Pour la résolution, on se souviendra des conditions initiales $L_0^{(\alpha)} = 1$ et $L_1^{(\alpha)} = \alpha + 1 - x$.)

4. Module quotient et dimension de l'espace des solutions

Dans le cas commutatif, le quotient l'une algèbre A de polynômes par l'un de ses idéaux (bilatères) I reste munie d'un produit canonique et est donc une algèbre. Cette propriété n'est plus réalisée dans le cas d'une algèbre de Ore $A = k(x)\langle\partial;\sigma,\delta\rangle$. Mais, en voyant A comme un idéal à gauche trivial de lui-même, le quotient A/I conserve une addition canonique, ainsi que la stabilité par multiplication à gauche par tout élément de A, ce qui fait de ce quotient un module à gauche sur A. Ce module est en particulier un espace vectoriel sur $k(x)$.

Dans le cas commutatif, un cadre particulier important est celui d'un quotient de dimension finie comme espace vectoriel, car il représente une famille finie de points solutions. Le cas d'un quotient d'une algèbre de Ore qui est un espace vectoriel sur $k(x)$ de dimension finie est lui-aussi important ; dans l'interprétation en opérateurs linéaires, il correspond en règle générale à un espace vectoriel de solutions de dimension finie sur k.

Dans la fin de cette section, nous allons quelque peu détailler ce lien dans le cas d'opérateurs différentiels ; d'autres cadres fournissent le même genre de résultats. Nous irons plus loin sur le sujet dans la section sur les fonctions ∂-finies.

4.1. Séries formelles solutions en un point régulier dans le cas différentiel. Considérons une algèbre de Ore

$$A = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_r)\langle \partial_1, \dots, \partial_r; I, \dots, I, D_{x_1}, \dots, D_{x_r}\rangle,$$

un idéal à gauche I de cette algèbre, donné par un système différentiel linéaire. Nous voulons décrire les solutions séries annulées par tous les éléments de I, où une série est ici un élément de $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_r]]$, c'est-à-dire une combinaison linéaire formelle éventuellement infinie de monômes à exposants entiers positifs. Dans cette objectif, cette section ébauche un analogue en plusieurs variables de la conversion entre équation différentielle décrivant une fonction D-finie d'une variable et équation de récurrence vérifiée par la suite P-récursive des coefficients.

Fixons un ordre monomial sur les monômes en les ∂_i, puis, pour cet ordre, une base de Gröbner B de I, donnée par des éléments de A sans fractions, c'est-à-dire avec des coefficients polynomiaux. Cette base de Gröbner B fournit un escalier ; notons S l'ensemble des multi-exposants $s = (s_1, \dots, s_r)$ des monômes $\partial^s = \partial_1^{s_1} \cdots \partial_r^{s_r}$ sous l'escalier, c'est-à-dire des monômes qui ne sont pas réductibles par B. Le module quotient A/I a alors une base d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}(x)$ constituée des $\partial^s + I$, les classes des ∂_s modulo I, pour s décrivant S. Soit u le polynôme produit des coefficients de tête des éléments de B et faisons l'hypothèse que u ne s'annule pas pour $x_1 = \cdots = x_r = 0$. Nous affirmons qu'alors, l'idéal I admet un espace vectoriel de solutions séries dans $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_r]]$ de dimension le cardinal de S, c'est-à-dire la dimension sur $\mathbb{C}(x)$ de A/I vu comme espace vectoriel. On dit dans ce cas que le point $(0, \dots, 0)$ est régulier pour le système différentiel linéaire définissant l'idéal I.

En effet, pour tout multi-exposant $n = (n_1, \dots, n_r)$, la réduction du monôme ∂^n par B fournit une combinaison linéaire $\sum_{s \in S} v_{n,s} \partial^s$ congrue à ∂^n modulo I. Notons que par construction, les coefficients $v_{n,s}$ sont éléments de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_r, u^{-1}]$ et ont ainsi une évaluation bien définie en $x_1 = \cdots = x_r = 0$. Maintenant, puisque chaque élément de I s'annule sur toute solution série

$$\phi = \sum_{n_1 \in \mathbb{N}, \dots, n_r \in \mathbb{N}} c_{n_1, \dots, n_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}$$

de I, le monôme ∂^n et la somme $\sum_{s \in S} v_{n,s} \partial^s$ ont la même action sur ϕ :

$$\partial_i \cdot \phi = \sum_{s \in S} v_{n,s} \partial^s \cdot \phi.$$

Une évaluation en $x_1 = \cdots = x_r = 0$ donne la relation

$$n_1! \dots n_r!\, c_{n_1, \dots, n_r} = \sum_{s \in S} v_{n,s}(0, \dots, 0) s_1! \dots s_r!\, c_{s_1, \dots, s_r}.$$

Autrement dit, la série ϕ est totalement déterminée par ses quelques premiers coefficients c_s pour $s \in S$, en nombre donné par la dimension de A/I.

Illustrons cette idée en reprenant l'exemple des polynômes orthogonaux de Laguerre, qui étendent déjà légèrement le cadre purement différentiel qui précède. Posons

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \ell_{n,k} x^k.$$

En multipliant chaque p_i pour $i = 1, 2, 3$ par ∂_x^k, il vient

$$\begin{aligned}
\partial_x^k p_1 &= (n+2)\partial_n^2\partial_x^k - (2n+\alpha+3-x)\partial_n\partial_x^k + k\partial_n\partial_x^{k-1} + (n+\alpha+1)\partial_x^k,\\
\partial_x^k p_2 &= x\partial_x^{k+1} - (n+1)\partial_n\partial_x^k + (n+\alpha+k+1-x)\partial_x^k - k\partial_x^{k-1},\\
\partial_x^k p_3 &= x\partial_x^{k+2} + (\alpha+k+1-x)\partial_x^{k+1} + (n-k)\partial_x^k.
\end{aligned}$$

Après application sur $L^{(\alpha)}$, évaluation en $x = 0$ et division par $k!$, on trouve les relations de récurrence sur la famille doublement indexée des $\ell_{n,k}$

$$\begin{aligned}
(n+2)\ell_{n+2,k} - (2n+\alpha+3)\ell_{n+1,k} + \ell_{n+1,k-1} + (n+\alpha+1)\ell_{n,k} &= 0,\\
-(n+1)\ell_{n+1,k} + (n+\alpha+k+1)\ell_{n,k} - \ell_{n,k-1} &= 0,\\
(k+1)(\alpha+k+1)\ell_{n,k+1} + (n-k)\ell_{n,k} &= 0.
\end{aligned}$$

En décalant la dernière vers l'arrière en k puis éliminant $\ell_{n,k-1}$ entre la relation obtenue et la deuxième récurrence ci-dessus, on obtient la récurrence

$$(n+1-k)\ell_{n+1,k} - (n+\alpha+1)\ell_{n,k} = 0.$$

Ce jeu de récurrences fournit tous les $\ell_{n,k}$.

4.2. Solutions en séries des systèmes hypergéométriques de Gel'fand, Kapranov et Zelevinsky. Prenons un exemple concret, celui des systèmes hypergéométriques dans la formulation de Gel'fand, Kapranov et Zelevinsky. L'algèbre de Ore qui intervient dans cet exemple est l'algèbre A engendrée par quatre indéterminées ∂_1, …, ∂_4 sur le corps $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_4)$, chaque ∂_i représentant l'opérateur de dérivation par rapport à x_i. Le système GKZ est le système

$$\begin{aligned}
p_1 &= \partial_2\partial_3 - \partial_1\partial_4,\\
p_2 &= x_1\partial_1 - x_4\partial_4 + (1-c),\\
p_3 &= x_2\partial_2 + x_4\partial_4 + a,\\
p_4 &= x_3\partial_3 + x_4\partial_4 + b,
\end{aligned}$$

pour des paramètres complexes a, b et c. L'objectif de l'exemple est de montrer que ce système admet un espace vectoriel de solutions formelles de dimension exactement 2, où par solution formelle nous entendons plus maintenant généralement une série de la forme

$$x_1^{a_1} \dots x_4^{a_4} \sum_{n_1\in\mathbb{Z},\dots,n_4\in\mathbb{Z}} c_{n_1,\dots,n_4} x_1^{n_1} \cdots x_4^{n_4},$$

pour des a_i et des coefficients complexes, ou une combinaison linéaire de telles séries. (Il y a bien un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ où vivent ces séries, mais pas de produit sur ces séries. En revanche, toute séries peut être multipliée par un polynôme en les x_i et leurs inverses x_i^{-1}, ainsi que dérivée formellement par rapport à chacune des indéterminées, tout en restant dans l'espace vectoriel.)

Soit I l'idéal engendré par le système $\{p_1, \dots, p_4\}$ et calculons à partir de ce système une base de Gröbner de I pour l'ordre $\mathsf{lex}(\partial_1, \dots, \partial_4)$. Les monômes de tête respectifs de p_1 et p_2 sont $\partial_1\partial_4$ et ∂_1. Le S-polynôme de p_1 et de p_2 est donc

$$\mathrm{Spoly}(p_1, p_2) = x_1 p_1 + \partial_4 p_2 = x_1\partial_2\partial_3 - x_4\partial_4^2 - c\partial_4,$$

dont le monôme de tête est $\partial_2\partial_3$; il est donc réductible par p_3. Après multiplication par $-x_2$ et ajout de $x_1\partial_3 p_3$, on obtient

$$x_1x_4\partial_3\partial_4 + ax_1\partial_3 + x_2x_4\partial_4^2 + cx_2\partial_4.$$

Ce polynôme a $\partial_3\partial_4$ pour monôme de tête et est donc réductible par p_4. Après multiplication par x_3 et retranchement de $x_1x_4\partial_4p_4$, on aboutit à

$$ax_1x_3\partial_3 + (x_2x_3 - x_1x_4)x_4\partial_4^2 + \big(cx_2x_3 - (b+1)x_1x_4\big)\partial_4,$$

qui est encore réductible par p_4. Après retranchement de ax_1p_4, on a finalement un polynôme qui n'est pas réductible par $\{p_1, \dots, p_4\}$, à savoir

$$p_5 = (x_2x_3 - x_1x_4)x_4\partial_4^2 + \big(cx_2x_3 - (a+b+1)x_1x_4\big)\partial_4 - abx_1.$$

Par ailleurs, les S-polynômes entre les polynômes p_2, p_3 et p_4 pris deux à deux sont tous nuls, comme on le vérifie en observant que les $x_i\partial_i$ commutent deux à deux. En poursuivant les calculs sur les S-polynômes $\operatorname{Spoly}(p_i, p_5)$, on montre que tous ces derniers se réduisent à 0 par $\{p_1, \dots, p_5\}$. On obtient ainsi qu'un base de Gröbner minimale est $\{p_2, p_3, p_4, p_5\}$, avec les monômes dominants respectifs ∂_1, ∂_2, ∂_3 et ∂_4^2.

Le module quotient A/I a donc une base d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_4)$ constituée de $1+I$ et ∂_4+I, les classes respectives de 1 et ∂_4 modulo I. La structure de module est donnée explicitement par l'action des ∂_i sur ces deux éléments de base.

Exercice 3. Donner l'expression explicite de cette action en récrivant chaque $\partial_i \cdot (1+I)$ et chaque $\partial_i \cdot (\partial_4 + I)$ sur la base $(1+I, \partial_4+I)$.

Revenons sur les solutions séries du système GKZ. Le polynôme p_2 agit sur un monôme par

$$p_2 \cdot (x_1^{\lambda_1} \cdots x_4^{\lambda_4}) = (\lambda_1 - \lambda_4 + 1 - c)x_1^{\lambda_1} \cdots x_4^{\lambda_4}.$$

(Notons la distinction entre le produit dans A noté $p_2x_1^{\lambda_1} \cdots x_4^{\lambda_4}$ et l'opération de p_2, ici sur une serie h en x, notée $p_2 \cdot h$; on comparera par exemple $\partial_1x_1^5 = x_1^5\partial_1 + 5x_1^4$ et $\partial_1 \cdot x_1^5 = 5x_1^4$.) Ainsi, un monôme $x_1^{\lambda_1} \cdots x_4^{\lambda_4}$ ne peut apparaître avec un coefficient non nul dans une série ϕ solution du système GKZ que si $\lambda_1 - \lambda_4 + 1 - c$ est nul. En poursuivant ce type de raisonnement avec p_3 et p_4, on obtient de même les contraintes $\lambda_2 + \lambda_4 + a = 0$ et $\lambda_3 + \lambda_4 + a = 0$ et on aboutit à ce que les seuls monômes pouvant apparaître avec un coefficient non nul sont de la forme

$$x_1^{\lambda_4+c-1}x_2^{-\lambda_4-a}x_3^{-\lambda_4-b}x_4^{\lambda_4} = \frac{x_1^{c-1}}{x_2^a x_3^b}\left(\frac{x_1x_4}{x_2x_3}\right)^{\lambda_4},$$

et une solution ϕ est nécessairement de la forme

$$\phi = \frac{x_1^{c-1}}{x_2^a x_3^b} f\left(\frac{x_1x_4}{x_2x_3}\right),$$

pour une série formelle f en y à exposants entiers relatifs. Reste à exploiter que ϕ est solution de p_1, ou de manière équivalente puisque sous la forme ci-dessus ϕ est déjà solution de p_2, p_3 et p_4, de p_5. Après avoir évalué en $y = x_1x_4/x_2x_3$, on a

$$0 = \frac{x_2^a x_3^b}{x_1^{c-2}} p_5 \cdot \phi = (1-y)yf''(y) + \big(c - (a+b+1)y\big)f'(y) - abf(y).$$

On reconnaît là l'équation hypergéométrique de Gauss, annulée par la série de Gauss

$$f_1 = {}_2\mathrm{F}_1(a, b; c; y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{y^n}{n!}$$

où $(x)_n$ représente le symbole de Pochhammer, $x(x+1)\cdots(x+n-1)$. On vérifie qu'une solution formelle linéairement indépendante avec f_1 est $f_2 = y^{1-c}\,{}_2\mathrm{F}_1(a-c+1, b-c+1; 2-c; y)$. On a ainsi obtenu deux solutions formelles linéairement indépendantes du système GKZ, $\phi_i = x_1^{c-1}/x_2^a x_3^b \times f_i(x_1x_4/x_2x_3)$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

Pour tout système différentiel représenté par un idéal I de A, un résultat d'analyse, le théorème de Cauchy–Kovalevskaya, affirme l'existence, au voisinage de tout point en dehors d'une certaine variété singulière, d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de solutions analytiques de dimension celle sur $\mathbb{C}(x)$ de l'espace vectoriel A/I. Or, on montre que cette variété singulière est incluse dans le lieu des zéros du produit des coefficients polynomiaux de tête d'une base de Gröbner de I écrite sans fractions.

Dans le cas de notre exemple, la dimension de A/I est 2 et la variété singulière est incluse dans le lieu des zéros de $x_1 \cdots x_4(x_2x_3 - x_1x_4)$. Hors de ce lieu, y n'est ni nul, ni infini, ni égal à 1, et les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sont donc analytiques puisque, moyennant quelques hypothèses sur les paramètres a, b et c, les deux séries solutions de l'équation de Gauss, f_1 et f_2, représentent des fonctions analytiques sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. On a donc trouvé un espace de solutions analytiques de dimension 2, et par le théorème de Cauchy–Kovalevskaya, toutes les solutions analytiques du système GKZ en dehors de sa variété singulière.

5. Les fonctions ∂-finies et leurs clôtures

Nous poursuivons maintenant avec le cas particulier important des système fonctionnels linéaires correspondant à des modules A/I de dimension finie sur $\mathbb{C}(x)$. L'objectif est ici de montrer que pour une algèbre A donnée, leurs solutions, que nous appellerons « fonctions ∂-finies », forment une algèbre sur $\mathbb{C}$. Nous allons donner un algorithme pour calculer les clôtures correspondantes. Voici tout de suite la définition, déjà motivée par les sections et chapitres précédents sur les fonctions D-finies et les suites P-récursives.

Définition (Fonction ∂-finie). *Étant donnée une algèbre de Ore (rationnelle)*

$$A = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_r)\langle \partial_1, \dots, \partial_r; \sigma_1, \dots, \sigma_r, \delta_1, \dots, \delta_r \rangle$$

agissant sur un $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_r)$-espace vectoriel V, un élément f de V est dit ∂-fini lorsque l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. *pour chaque i entre 1 et r, il existe un polynôme $P_i = P_i(x_1, \dots, x_r, \partial_i)$ dont l'action annule f ;*
2. *la famille des $\partial^a \cdot f$, où ∂^a décrit les monômes de A, engendre un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}(x)$;*
3. *le module quotient A/I où I note l'idéal annulateur de f pour l'action de A est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}(x)$.*

Par commodité, nous appellerons « fonctions » les éléments de l'espace vectoriel V, ce quand bien même il ne s'agirait pas de fonctions de l'analyse, mais afin d'éviter la terminologie plus lourde et moins imagée d'« éléments ∂-finis d'un module sur A ».

Exercice 4. Vérifier l'équivalence entre les trois points de la définition cidessus.

5.1. Méthode du vecteur cyclique. L'algorithme envisagé pour les clôtures des fonctions ∂-finies s'appuie le calcul de vecteur cyclique. Rappelons-en l'idée. Classiquement, étant donné un espace vectoriel V sur un corps k, sur lequel on suppose donnée une action de $k[X]$, un vecteur $v \in V$ est dit *cyclique* si la famille $\{X^i \cdot v\}$ engendre V comme k-espace vectoriel. Alors, v engendre V comme $k[X]$-module. Pour calculer, on suppose que V est de dimension finie d et que l'action de X est donnée sur une base $B = (b_1, \dots, b_d)$ de V par une matrice M telle que $X \cdot v = (a_1, \dots, a_d)M\,{}^tB$ pour tout vecteur $v = a_1 b_1 + \cdots + a_d b_d$. Pour tester si v est cyclique et le cas échéant rendre explicite la structure de module de V, on range dans une matrice les lignes $(a_1, \dots, a_d)M^i$ pour $0 \leq i \leq m$ avec m à déterminer et on cherche par l'algorithme de Gauss une dépendance linéaire entre les lignes de la matrice obtenue. En procédant avec des $m \geq 0$ successifs, la première dépendance linéaire fournit le polynôme minimal de v sous l'action de X sur V ; son degré m vérifie $m \leq d$.

Ce calcul s'étend d'abord au cadre commutatif de l'action d'une algèbre $k[X] = k[X_1, \dots, X_r]$ de polynômes en plusieurs indéterminées. Chaque X_i correspond alors à une matrice M_i et la commutativité des X_i dans $k[X]$ induit la commutativité entre les matrices M_i. Au lieu d'itérer sur les monômes X^i par ordre croissant de i, on itère maintenant sur les monômes $X^a = X_1^{a_1} \cdots X_r^{a_r}$ selon tout ordre qui assure qu'un monôme n'est considéré qu'après tous ses diviseurs. Soit $a(0)$, $a(1)$, etc, l'ordre dans lequel les multi-exposants des monômes sont énumérés. À chaque étape, on recherche une dépendance linéaire entre des vecteurs

$$X^{a(0)} \cdot v, \dots, X^{a(m)} \cdot v.$$

En cas d'échec, on conserve ces $m + 1$ vecteurs et on reprend la recherche après avoir ajouté le nouveau vecteur $X^{a(m+1)} \cdot v$; en cas de succès, on retire le dernier vecteur introduit, $X^{a(m)} \cdot v$, on évite par la suite tous les multiples de ce monôme, et on introduit le nouveau vecteur $X^{a(m+1)} \cdot v$ pour reprendre la recherche sur la famille

$$X^{a(0)} \cdot v, \dots, X^{a(m-1)} \cdot v, X^{a(m+1)} \cdot v.$$

Ce calcul termine si et seulement si le quotient $k[X]/I$, vu comme k-espace vectoriel, est de dimension finie. Chaque dépendance linéaire calculée fournit un polynôme P tel que $P(X_1, \dots, X_r) \cdot v = 0$. Lorque l'itération sur les monômes X^a suit l'ordre croissant selon un ordre monomial (admissible), l'ensemble des polynômes annulateurs obtenus constitue une base de Gröbner de I pour l'ordre choisi.

5.2. Algorithmes de clôture des fonctions ∂-finies. Le procédé du vecteur cyclique s'étend au cas de l'action d'une algèbre de Ore (rationnelle) en présence de fonctions ∂-finies. Pour une algèbre de Ore

$$A = \mathbb{C}(x)\langle \partial_1, \dots, \partial_r; \sigma_1, \dots, \sigma_r, \delta_1, \dots, \delta_r \rangle,$$

l'espace vectoriel utilisé est un module du type A/I, vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}(x)$, ou plutôt un module obtenu à partir de quelques constructions de base sur des modules de la forme A/I, comme on va le voir sur l'exemple plus bas. L'espace V étant d'une certaine dimension finie d et une base $B = (b_1, \dots, b_d)$ de V étant fixée, l'action de chaque ∂_i sur un vecteur $v = a_1 b_1 + \cdots + a_d b_d$ est donnée par une matrice M_i sous la forme

$$\partial_i \cdot v = \big(\sigma_i(a_1, \dots, a_d)M_i + \delta_i(a_1, \dots, a_d)\big)\,{}^tB,$$

en adoptant une notation selon laquelle les σ_i et δ_i agissent distributivement sur les entrées de vecteurs ou de matrices. Pour le choix particulier $v = b_\ell$, on observe que la ℓ-ième ligne de M_i n'est autre que le vecteur ligne des composantes de $\partial_i \cdot b_\ell$ sur la base B.

En faisant maintenant agir ∂_j et en posant $a = (a_1, \dots, a_d)$, on a

$$\partial_j\partial_i \cdot v = \big(\sigma_j\sigma_i(a)\sigma_j(M_i)M_j + \sigma_j\delta_i(a)M_j + \sigma_j\sigma_i(a)\delta_j(M_i) + \delta_j\sigma_i(a)M_i + \delta_j\delta_i(a)\big)\, {}^tB.$$

En tenant compte, pour $i \neq j$ de la commutation $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ et des commutations entre morphismes de corps et σ-dérivations données par la définition des algèbres de Ore, on déduit la relation suivante, qui remplace la commutation entre les matrices du cas commutatif,

$$\sigma_j(M_i)M_j + \delta_j(M_i) = \sigma_i(M_j)M_i + \delta_i(M_j).$$

Lorsque de telles relations sont assurées, la même méthode de recherche de dépendances linéaires par la méthode de Gauss que dans le cas commutatif s'applique et fournit un calcul de l'addition et du produit de fonctions ∂-finies, ou même d'une expression polynomiale en des fonctions ∂-finies. Plutôt que de faire une présentation formelle de ces algorithmes, nous en donnons l'idée sur un exemple.

Prenons celui du calcul du produit des deux fonctions f et g en deux variables x et y, données par $f(x, y) = \exp(xy)$ et $g(x, y) = J_\mu(x+y)$, où, pour un paramètre μ complexe, J_μ est la fonction de Bessel de première espèce, solution de l'équation différentielle

$$z^2 J_\mu''(z) + zJ_\mu'(z) + (z^2 - \mu^2)J_\mu(z) = 0$$

qui admet à l'origine le développement asymptotique

$$J_\mu(z) \sim \frac{1}{2^\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n}}{n!\,\Gamma(n+\mu+1)}.$$

Considérons l'algèbre de Ore $A = \mathbb{C}(\mu, x, y)\langle\partial_x, \partial_y; I, I, D_x, D_y\rangle$, où μ est maintenant un paramètre formel. Des bases de Gröbner des annulateurs I et J dans A de f et g pour l'ordre $\mathsf{lex}(\partial_y, \partial_x)$ sont respectivement

$$\{\partial_x - y, \partial_y - x\} \qquad \text{et} \qquad \{(x+y)^2\partial_x^2 + (x+y)\partial_x + (x+y)^2 - \mu^2, \partial_y - \partial_x\}.$$

En désignant maintenant par f et g les vecteurs cycliques générateurs des modules A/I et A/J, avec un petit abus de notation, on introduit donc l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}(\mu)$ de base $B = \big(f \otimes g, f \otimes (\partial_x \cdot g)\big)$, où l'on voit le produit $h = f \otimes g$ donné par ses coordonnées $(1, 0)$. Puisque

$$\partial_x \cdot (f \otimes g) = (\partial_x \cdot f) \otimes g + f \otimes (\partial_x \cdot g) = yf \otimes g + f \otimes (\partial_x \cdot g)$$

et

$$\begin{aligned}\partial_x \cdot \big(f \otimes (\partial_x \cdot g)\big) &= yf \otimes (\partial_x \cdot g) + f \otimes (\partial_x^2 \cdot g)\\ &= yf \otimes (\partial_x \cdot g) + \big((x+y)^{-2}\mu^2 - 1\big) f \otimes g - (x+y)^{-1} f \otimes (\partial_x \cdot g),\end{aligned}$$

et des relations similaires pour l'action de ∂_y, on trouve les matrices

$$M_x = \begin{pmatrix} y & 1 \\ (x+y)^{-2}\mu^2 - 1 & y - (x+y)^{-1} \end{pmatrix}$$

et

$$M_y = \begin{pmatrix} x & 1 \\ (x+y)^{-2}\mu^2 - 1 & x - (x+y)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Choisissons d'itérer selon un ordre raffinant le degré total en ∂_x et ∂_y. On fait d'abord agir ∂_y pour trouver $\partial_y \cdot h = \big((1,0)M_y + d(1,0)/dy\big)\,{}^tB = (x,1)\,{}^tB$, qui n'est pas lié avec $(1,0)$. De même, on trouve $\partial_x \cdot h = (y,1)\,{}^tB$, qui fournit la liaison $p_1 \cdot h = 0$ pour $p_1 = \partial_x - \partial_y + (x-y)$. Pour la suite du calcul, on exclut alors tous les monômes divisibles par ∂_x ; le monôme considéré suivant est ∂_y^2. Son action sur h donne

$$\partial_y^2 \cdot h = \big((x,1)M_y + d(x,1)/dy\big)\,{}^tB = \big((x+y)^{-2}\mu^2 + x^2 - 1, 2x - (x+y)^{-1}\big)\,{}^tB,$$

et l'on obtient un second annulateur de h,

$$p_2 = (x+y)^2\partial_y^2 - (x+y)(2x^2 + 2xy - 1)\partial_y + (x+y)(x^3 + x^2y + y) - \mu^2.$$

Pour la suite du calcul, on exclut donc tous les monômes divisibles par ∂_y^2, si bien qu'il ne reste plus aucun monôme à considérer. L'idéal annulateur de h est l'idéal $Ap_1 + Ap_2$, dont $\{p_1, p_2\}$ est une base de Gröbner pour l'ordre $\mathsf{lex}(\partial_y, \partial_x)$, de monômes de tête respectifs ∂_x et ∂_y^2 ; le module A/I est donné comme $\mathbb{C}(x,y)$-espace vectoriel par sa base $(1 + I, \partial_x + I)$.

Le calcul qui précède se revisite en abandonnant l'écriture matricielle et en faisant apparaître plus explicitement les calculs de restes modulo une base de Gröbner. On récrit d'abord $\partial_y \cdot h$ sous la forme

$$\partial_y \cdot h = (\partial_y \cdot f) \otimes g + f \otimes (\partial_y \cdot g) = xf \otimes g + f \otimes (\partial_x \cdot g),$$

après réductions par les bases de Gröbner pour I et J ; ce vecteur est donc linéairement indépendant de h. On procède ensuite de même pour $\partial_x \cdot h$, de façon à avoir

$$\partial_x \cdot h = (\partial_x \cdot f) \otimes g + f \otimes (\partial_x \cdot g) = yf \otimes g + f \otimes (\partial_x \cdot g);$$

on retrouve ainsi l'annulateur p_1. Le monôme considéré suivant est ∂_y^2, d'action sur h

$$\partial_y^2 \cdot h = x^2 f \otimes g + 2xf \otimes (\partial_x \cdot g) - (x+y)^{-2} f \otimes \big((x+y)\partial_x + (x+y)^2 - \mu^2\big)g;$$

ce vecteur est donc linéairement lié à h et $\partial_y \cdot h$ et l'on retrouve le second annulateur p_2. Le calcul se termine de la même manière.

Pour l'algorithme d'addition, les mêmes idées algorithmiques fonctionnent en calculant dans la somme directe $A/I \oplus A/J$.

Bibliographie

[1] Chyzak (Frédéric) and Salvy (Bruno). – Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate holonomic identities. *Journal of Symbolic Computation*, vol. 26, n° 2, August 1998, pp. 187–227.

[2] Saito (Mutsumi), Sturmfels (Bernd), and Takayama (Nobuki). – *Gröbner deformations of hypergeometric differential equations.* – Springer-Verlag, Berlin, 2000, viii+254p.