COURS 25

Équations fonctionnelles linéaires et polynômes tordus

Notes de Frédéric Chyzak

Résumé

Une certaine variété de polynômes non commutatifs fournit une représentation unifiée pour une large classe d'équations fonctionnelles linéaires. Celle-ci s'avère bien adaptée pour les calculs. Nous réinterprétons nombre des algorithmes vus dans ce cours dans ce point de vue.

1. Des polynômes non commutatifs pour calculer avec des opérateurs linéaires

Dans les années 1930, le mathématicien Oystein Ore (1899–1968) s'est intéressé à la résolution de systèmes linéaires reliant des dérivées $f_i^{(j)}(x)$, des décalées $f_i(x+j)$, ou les subtitutions $f_i(q^j x)$ de fonctions inconnues $f_i(x)$. À cette fin, il a introduit de nouvelles familles de polynômes en une variable ayant la propriété que cette variable ne commute pas avec les coefficients des polynômes. Ce défaut de commutativité reflète une sorte de loi de Leibniz.

Rappelons la relation de Leibniz pour deux fonctions quelconques f et g :

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

En notant D l'opérateur de dérivation, M celui qui à une fonction f associe la fonction donnée par $M(f)(x) = xf(x)$, I l'opérateur identité sur les fonctions, et $\circ$ la composition d'opérateurs, la règle de Leibniz donne, pour $f(x) = x$ et g quelconque,

$$(D \circ M)(g) = D\big(M(g)\big) = M\big(D(g)\big) + g = (M \circ D + I)(g).$$

L'identité étant vérifiée par toute g, on obtient l'égalité $D \circ M = M \circ D + I$ entre opérateurs linéaires différentiels. D'autres opérateurs vérifient des analogues de la règle de Leibniz : l'opérateur Δ de différence finie, donné par $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$; l'opérateur $S = \Delta + I$ de décalage, donné par $S(f)(x) = f(x+1)$; pour une constante q fixée autre que 0 et 1, l'opérateur H de dilatation, donné par $\Delta(f)(x) = f(qx)$. On a les relations :

$$\Delta(fg)(x) = f(x+1)\Delta(g)(x) + \Delta(f)(x)g(x),$$
$$(fg)(x+1) = f(x+1)g(x+1), \qquad (fg)(qx) = f(qx)g(qx),$$

qui mènent aux relations $\Delta \circ M = (M + I) \circ \Delta + I$, $S \circ M = (M + I) \circ S$, $H \circ M = Q \circ M \circ H$ entre opérateurs linéaires, après avoir introduit un nouvel opérateur Q donné par $Q(f)(x) = qf(x)$.

Le point de vue d'Ore est d'abstraire ces différents contextes d'opérateurs dans un même moule algébrique.

DÉFINITION. *Soit A un anneau commutatif unitaire de caractéristique zéro, que nous supposons muni d'un endomorphisme injectif σ et d'une σ-dérivation δ, au sens où pour tout a et tout b de A,*

$$\sigma(a+b)=\sigma(a)+\sigma(b), \qquad \sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b), \qquad \delta(ab)=\sigma(a)\delta(b)+\delta(a)b.$$

Pour une nouvelle variable ∂, on appelle anneau de polynômes tordus *l'algèbre sur A engendrée par ∂ et les relations, pour tout a de A,*

$$\partial a=\sigma(a)\partial+\delta(a).$$

On note cet anneau $A\langle\partial;\sigma,\delta\rangle$.

(La terminologie « polynôme tordu » est la traduction de l'anglais « *skew polynomial* », où « skew » signifie « de biais », « oblique ». Certains auteurs ont proposé la traduction « polynôme gauche », où « gauche » a le sens de « voilé », par opposition à « plan ». Mais nous voulons éviter ici toute confusion avec des notions algébriques de multiple, module, fraction, etc, pour lesquelles « gauche » a le sens opposé de « droite ».)

Des choix adéquats de σ et δ nous font retrouver les quelques exemples donnés plus haut. Pour simplifier la notation, nous supposons que A peut s'identifier à un bon espace de fonctions. On a alors, en notant 0 l'application qui a toute fonction associe la fonction constante nulle :

- $\mathbb{Q}(x)\langle\partial;I,D\rangle$ représente l'algèbre des opérateurs différentiels linéaires ;
- $\mathbb{Q}(x)\langle\partial;S,0\rangle$ représente l'algèbre des opérateurs de récurrence ;
- $\mathbb{Q}(x)\langle\partial;S,\Delta\rangle$ représente l'algèbre des opérateurs de différence finie ;
- $\mathbb{Q}(x)\langle\partial;H,0\rangle$ pour $q\in\mathbb{Q}(x)\setminus\{0,1\}$ représente l'algèbre des opérateurs de q-dilatation ;
- $\mathbb{Q}(x)\langle\partial;I,0\rangle$ n'est autre que l'anneau commutatif $\mathbb{Q}(x)[\partial]$ des polynômes usuels.

Toutes ces algèbres d'opérateurs sont à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$; on dispose aussi d'analogues pour $A=\mathbb{Q}[x]$ et $A=\mathbb{Q}[x,x^{-1}]$.

On fera attention à la notation. Si la composition entre opérateurs est notée par $\circ$, nous ne ferons qu'une simple juxtaposition pour le produit de polynômes tordus, et nous noterons 1 l'élément neutre pour le produit de polynômes tordus. Néanmoins, on fera l'abus de notation de noter de la même façon, D_x, la dérivation par rapport à x quel que soit l'anneau A, et I, sans indice, pour l'identité de n'importe quel A. De plus, nous noterons simplement x pour M. Ainsi, on a :

- $\partial x=x\partial+1$ dans $\mathbb{Q}(x)\langle\partial;I,D\rangle$;
- $\partial x=(x+1)\partial$ dans $\mathbb{Q}(x)\langle\partial;S,0\rangle$;
- $\partial x=(x+1)\partial+1$ dans $\mathbb{Q}(x)\langle\partial;S,\Delta\rangle$;
- $\partial x=qx\partial$ dans $\mathbb{Q}(x)\langle\partial;H,0\rangle$;
- $\partial x=x\partial$ dans $\mathbb{Q}(x)\langle\partial;I,0\rangle=\mathbb{Q}(x)[\partial]$.

Le cas $\delta=0$ est fréquent, et on écrit alors $A\langle\partial;\sigma\rangle$, sans référence au 0. De même que dans le cas commutatif on définit les polynômes de Laurent, dont l'algèbre est notée $A[X,X^{-1}]$, et dans laquelle $XX^{-1}=X^{-1}X=1$, le cas où σ est inversible et autre que l'identité permet de représenter des opérateurs qui possèdent un inverse. Dans ce cas, on notera $A\langle\partial,\partial^{-1};\sigma\rangle$ l'algèbre où $\partial a=\sigma(a)\partial$, $\partial^{-1}a=\sigma^{-1}(a)\partial^{-1}$, $\partial\partial^{-1}=\partial^{-1}\partial=1$.

Pour finir de se détacher de la notation en termes d'opérateurs, on fait agir les anneaux de polynômes tordus sur les espaces de fonctions, au sens de l'action d'un anneau sur un module. Rappelons qu'un module M sur un anneau A est un ensemble non vide, muni d'une loi $+$ en faisant un groupe additif, stable sous l'action d'une produit externe par les éléments de A, tel que l'action par produit externe par 1 soit l'identité, et vérifiant les formules $(PQ)\cdot f = P\cdot(Q\cdot f)$ et $(P+Q)\cdot f = (P\cdot f)+(Q\cdot f)$. Un anneau de polynômes tordus n'a pas d'action unique sur un espace de fonctions donné, mais dans la suite de ce texte, nous adoptons les conventions qu'un anneau de la forme $A\langle\partial;\sigma\rangle$ agit par $\partial\cdot f = \sigma(f)$ pour une extension convenable de σ, qu'un anneau de la forme $A\langle\partial;\sigma,\delta\rangle$ agit par $\partial\cdot f = \delta(f)$ pour une extension convenable de δ, et que les coefficients dans A agissent par simple multiplication, $a\cdot f = af$.

Munis de cette notation générique, nous allons maintenant réexprimer des algorithmes déjà vus et petit à petit introduire de nouveaux calculs.

2. Clôtures par morphismes entre anneaux de polynômes tordus

Dans cette section, nous sommes amenés à considérer simulanément des fonctions de x et des fonctions d'une autre variable. Aussi indiquerons-nous en indice de D, S, ∂, σ, δ, etc, la variable à laquelle ces objets font référence. De plus, les anneaux A qui servent à construire les anneaux de polynômes tordus sont de la forme $\mathbb{Q}[x]$ ou $\mathbb{Q}[x,x^{-1}]$.

2.1. Récurrence sur les coefficients extraits d'une série D-finie et série génératrice d'une suite P-récursive. On a déjà vu que lorsqu'une série $f = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ est D-finie, ses coefficients vérifient une relation de récurrence finie, autrement dit, que la suite $u = (u_n)_{c\geq 0}$ est P-récursive. La preuve repose sur les identités

$$xf = \sum_{n\geq 1} u_{n-1}x^n = \sum_{n\geq 1} (\partial_n^{-1}\cdot c)(n)\, x^n$$

et

$$D_x(f) = f' = \sum_{n\geq 0}(n+1)u_{n+1}x^n = \sum_{n\geq 0}\big((n+1)\partial_n\cdot c\big)(n)\, x^n,$$

où nous avons introduit l'anneau $\mathbb{Q}[n]\langle\partial_n,\partial_n^{-1};S_n\rangle$. Par récurrence, ceci donne

$$\begin{aligned} x^\alpha D_x^\beta(f) &= \sum_{n\geq\alpha}\Big(\partial_n^{-\alpha}\big((n+1)\partial_n\big)^\beta\cdot c\Big)(n)\, x^n \\ &= \sum_{n\geq\alpha}\big((n+1-\alpha)\cdots(n+\beta-\alpha)\partial_n^{\beta-\alpha}\cdot c\big)(n)\, x^n. \end{aligned}$$

Pour une série f solution de l'équation différentielle

$$a_r(x)f^{(r)}(x) + \cdots + a_0(x)f(x) = 0$$

où les a_i sont dans $\mathbb{Q}[x]$, nous obtenons ainsi une récurrence sur c, valable pour des n assez grands. Cette récurrence s'exprime en termes de polynômes tordus de la façon suivante. On représente l'opérateur différentiel associé à l'équation par le polynôme tordu $L = a_r(x)\partial_x^r + \cdots + a_0(x)$ dans $\mathbb{Q}[x]\langle\partial_x;I,D_x\rangle$ sur $\mathbb{Q}$. De la sorte, l'équation différentielle s'écrit $L\cdot f = 0$. On introduit aussi l'algèbre $\mathbb{Q}[n]\langle\partial_n,\partial_n^{-1};S_n\rangle$ et le morphisme d'algèbres μ défini par $\mu(x) = \partial_n^{-1}$ et $\mu(\partial_x) = (n+1)\partial_n$. Alors, la suite c des coefficients satisfait à la récurrence représentée par l'image $\mu(L)$. Pour comprendre pour quels n cette récurrence est valide, écrivons

$$\mu(L) = b_p(n)\partial_n^p + \dots + b_q(n)\partial_n^q$$

pour $p \leq q$ et $b_p b_q \neq 0$. Alors, la récurrence prend la forme

$$\big(\mu(L) \cdot u\big)(n) = b_p(n)u_{n+p} + \dots + b_q(n)u_{n+q} = 0$$

et est vérifiée pour tout n si $p \geq 0$ et pour tout $n \geq -p$ si $p < 0$.

De façon duale, une suite P-récursive u a une série génératrice $f = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ D-finie, ce que nous allons retrouver en termes de polynômes tordus. Pour ce point, nous supposons en fait que la suite u est prolongée aux indices négatifs par $u_n = 0$ pour $n < 0$, et qu'elle est P-récursive sur $\mathbb{Z}$ tout entier. Ceci ne constitue aucune perte de généralité : une récurrence valable pour la suite initiale devient valable pour la suite prolongée après multiplication par un polynôme de la forme $(n + 1)(n + 2) \dots (n + r)$. Les formules

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n u_n x^n = x\partial_x \cdot f \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_{n+1} x^n = x^{-1} f$$

donnent par récurrence

$$\sum_{n\geq 0} n^\alpha u_{n+\beta} x^n = (x\partial_x)^\alpha x^{-\beta} \cdot f = x^{-\beta}(x\partial_x - \beta)^\alpha \cdot f,$$

et fournissent un autre morphisme, ν, de $\mathbb{Q}[n]\langle\partial_n; S_n\rangle$ dans $\mathbb{Q}[x, x^{-1}]\langle\partial_x; I, D_x\rangle$, donné par $\nu(n) = x\partial_x$ et par $\nu(\partial_n) = x^{-1}$. Pour une suite u solution de l'équation de récurrence

$$b_p(n)u_{n+r} + \dots + a_0(n)u_n = 0$$

où les b_i sont dans $\mathbb{Q}[n]$, nous introduisons le polynôme tordu $P = b_p(n)\partial_n^r + \dots + b_0(n)$ de $\mathbb{Q}[n]\langle\partial_n; S_n\rangle$. Pour obtenir une relation différentielle sur la série génératrice f, nous considérons $\nu(P)$ que nous écrivons

$$\nu(P) = a_0(x) + \dots + a_r(x)\partial_x^r.$$

Alors la série f satisfait à la relation différentielle

$$a_0(x)f(x) + \dots + a_r(x)f^{(r)}(x) = 0.$$

Algébriquement, les propriétés précédentes s'expriment par le fait que μ s'étend en un isomorphisme d'algèbres entre $\mathbb{Q}[x, x^{-1}]\langle\partial_x; I, D_x\rangle$ et $\mathbb{Q}[n]\langle\partial_n, \partial_n^{-1}; S_n\rangle$, dont l'inverse étend ν.

2.2. Séries binomiales.

Exercice 1. Une série binomiale est une série de la forme $\sum_{n\geq 0} u_n \binom{x}{n}$. Montrer que les solutions en série binomiale d'une équation fonctionnelle à différence

$$a_r(x)f(x + r) + \dots + a_0(x)f(x) = 0$$

ont des coefficients u_n qui vérifient une récurrence et expliciter le morphisme entre algèbres de polynômes tordus correspondant.

2.3. Changements de variables. Lorsqu'une série D-finie $f(x)$ est solution d'une équation différentielle $L \cdot f = 0$ donnée par un polynôme tordu

$$L = L(x, \partial_x) = a_r(x)\partial_x^r + \cdots + a_0(x),$$

la série $f(\lambda x)$ est solution de l'équation différentielle associée à

$$L(\lambda x, \lambda^{-1}\partial_x) = a_r(\lambda x)\lambda^{-r}\partial_x^r + \cdots + a_0(\lambda x),$$

ce qui est encore le résultat d'un morphisme d'algèbres.

Lorsque f est une fonction D-finie, la fonction $z \mapsto f(1/z)$ est elle aussi D-finie, en z cette fois, pour autant que la fonction composée ait un sens. En effet, pour toute fonction g, notons $\tilde{g}(z) = g(1/z)$ (avec la même réserve de définition). Puisque $g(x) = \tilde{g}(1/x)$, par dérivation on a $g'(x) = -\tilde{g}'(1/x)/x^2$, ce qui est l'évaluation en $z = 1/x$ de $-z^2\partial_z \cdot \tilde{g}$. Autrement dit, on a $\widetilde{g'} = -z^2\partial_z \cdot \tilde{g}$, d'où par récurrence $\widetilde{g^{(\beta)}} = (-z^2\partial_z)^\beta \cdot \tilde{g}$. Ainsi, $\tilde{f}$ est D-finie, donnée comme vérifiant l'équation différentielle associée à l'image de L par le morphisme de $\mathbb{Q}[x]\langle\partial_x; I, D_x\rangle$ dans $\mathbb{Q}[z, z^{-1}]\langle\partial_z; I, D_z\rangle$ qui envoie x sur z^{-1} et ∂_x sur $-z^2\partial_z$.

Exercice 2. Plus généralement, la fonction obtenue par substitution rationnelle de la variable, donnée par $h(u) = f\big(r(u)\big)$, est encore D-finie. Nous laissons en exercice le soin de montrer ce résultat par la même approche dans le cas où la dérivée r' s'exprime comme une fraction rationnelle en r.

3. Division euclidienne

Dans cette section et les suivantes, nous nous appuyons sur des propriétés particulières des anneaux de polynômes tordus quand l'anneau A de la construction est un corps, que nous prendrons de la forme $\mathbb{Q}(x)$.

La commutation $\partial a = \sigma(a)\partial + \delta(a)$ dans $\mathbb{Q}(x)\langle\partial; \sigma, \delta\rangle$ permet d'écrire tout polynôme tordu sous la forme $a_0(x) + \cdots + a_r(x)\partial^r$, pour des fractions rationnelles a_i de $\mathbb{Q}(x)$ uniques. Une conséquence de l'injectivité de σ est l'existence d'un degré en ∂ bien défini, étant l'entier r de l'écriture précédente lorsque a_r est non nulle. En particulier, le degré d'un produit L_1L_2 de polynômes tordus est la somme des degrés des L_i. Il s'ensuit que la division euclidienne du cas commutatif, et toute la théorie qui en découle, se transpose avec peu d'altérations dans le cas tordu.

La différence principale avec le cas commutatif est qu'on distingue division euclidienne à gauche et division euclidienne à droite. Vu notre interprétation en termes d'opérateurs linéaires, nous ne considèrerons que la division à droite, qui se fait en retranchant des multiples à gauche. Soit à diviser $A = a_r(x)\partial^r + \cdots + a_0(x)$ de degré r par $B = b_s(x)\partial^s + \cdots + b_0(x)$ de degré s. On suppose $s \leq r$. Alors,

$$\partial^{r-s}B = \sigma^{r-s}\big(b_s(x)\big)\partial^r + \text{termes d'ordre inférieur},$$

où la puissance de σ représente une itération (par composition), et ainsi

$$A - a_r(x)\sigma^{r-s}\big(b_s(x)\big)^{-1}\partial^{r-s}B$$

est de degré strictement inférieur à r. Cette étape de réduction est l'étape élémentaire de la division euclidienne. En itérant le procédé, on aboutit à un reste R de degré strictement inférieur à s. En regroupant les facteurs gauches, on obtient un quotient à gauche Q tel que $A = QB + R$.

EXEMPLE 1. On considère l'anneau $\mathbb{Q}(n)\langle\partial_n; S_n\rangle$ des polynômes tordus représentant les opérateurs de décalage. La division de $A = (n^2-1)\partial_n^2 - (n^3+3n^2+n-2)\partial_n + (n^3+3n^2+2n)$, qui annule les combinaisons linéaires de $n!$ et n, par $B = n\partial_n^2 - (n^2+3n+1)\partial_n + (n^2+2n+1)$, qui annule les combinaisons linéaires $n!$ et 1, s'écrit

$$A = n^{-1}(n^2-1)B - n^{-1}(n^2+n+1)\big(\partial_n - (n+1)\big).$$

Le reste est multiple de $\partial_n - (n+1)$, qui représente la récurrence $u_{n+1} = (n+1)u_n$, vérifiée par la factorielle.

Notons une propriété de cette division : si A est multiplié à gauche par un facteur $m(x)$ sans que B ne soit changé, alors Q et R sont multipliés à gauche par le même facteur $m(x)$. Ceci ne vaut plus (en général) pour un facteur faisant intervenir ∂. On a la propriété analogue pour la multiplication à droite par un facteur $m(\partial)$.

La division euclidienne nous donne une nouvelle interprétation du calcul du N-ième terme d'une suite P-récursive $u = (u_n)$ relativement à $\mathbb{Q}(n)\langle\partial_n; S_n\rangle$. Supposons que u soit solution de l'équation de récurrence

$$a_r(n)u_{n+r} + \cdots + a_r(n)u_n = 0.$$

En déroulant la récurrence, on voit que u_N peut, pour tout N sauf annulation malvenue de a_r, se mettre sous la forme $\alpha_{r-1,N}u_{r-1} + \cdots + \alpha_{0,N}u_0$. Plus généralement, on a une relation qui récrit u_{n+N} en terme de u_{n+r-1}, …, u_n. Pour l'obtenir, associons à la récurrence sur u le polynôme tordu $P = a_r(n)\partial_n^r + \cdots + a_r(n)$. Pour un N donné, la division euclidienne de ∂_n^N par P s'écrit

$$\partial_n^N = Q_N(n)P + \alpha_{r-1,N}(n)\partial_n^{r-1} + \cdots + \alpha_{0,N}(n)$$

pour des fractions rationnelles $\alpha_{i,N}(n)$. Après application sur u et évaluation en n, nous obtenons

$$u_{n+N} = 0 + \alpha_{r-1,N}(n)u_{n+r-1} + \cdots + \alpha_{0,N}(n)u_n,$$

d'où le résultat annoncé pour $\alpha_{i,N} = \alpha_{i,N}(0)$.

EXERCICE 3. Nous laissons le lecteur se convaincre que la récriture d'une dérivée $f^{(N)}$ d'une fonction D-finie f décrite par une équation différentielle d'ordre r en terme de ses dérivées d'ordre strictement inférieur à r s'interprète de façon analogue comme le calcul d'un reste de division euclidienne.

Le même ingrédient se retrouve dans l'algorithme donnant la clôture par addition de deux fonctions D-finies ou de deux suites P-récursives : pour deux objets f et g à additionner, décrits comme solutions des équations respectives $L_f \cdot f = 0$ et $L_g \cdot g = 0$ pour des polynômes tordus de degrés respectifs r et s d'un anneau adéquat $A\langle\partial;\sigma,\delta\rangle$, l'algorithme exprime pour des i successifs $\partial^i \cdot (f+g)$ sous la forme $(\partial^i \bmod L_f)\cdot f + (\partial^i \bmod L_g)\cdot g$, où la notation $A \bmod B$ note le reste de la division euclidienne à droite de A par B. Lorsque suffisamment de i ont été considérés, l'algorithme qui a jusqu'à présent été donné calcule par de l'algèbre linéaire des cofacteurs a_0, …, a_{r+s} tels que

$$\sum_{i=0}^{r+s} a_i(\partial^i \bmod L_f) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=0}^{r+s} a_i(\partial^i \bmod L_g) = 0.$$

Notons que $P = \sum_{i=0}^{r+s} a_i\partial^i$ est un multiple commun à gauche de L_f et de L_g, puisque $P \bmod L_f = P \bmod L_g = 0$.

4. Recherche de solutions et factorisation d'opérateurs

Comme pour les anneaux de polynômes commutatifs usuels, une notion de factorisation est présente pour les anneaux de polynômes tordus. Une nuance importante réside dans le lien entre les « zéros » des polynômes tordus et la position des facteurs. Nous allons voir que la factorisation de polynômes tordus se relie aux algorithmes vus en cours pour la recherche de solutions polynomiales, rationnelles, et hypergéométriques dans le cas de récurrences.

Dans le cas d'un polynôme commutatif h se factorisant sous la forme fg pour des facteurs polynomiaux de degré au moins 2, tout zéro de f et tout zéro de g est zéro de h ; à l'inverse, quitte à se placer dans une clôture algébrique, tout zéro α de h en fournit un facteur $x - \alpha$ et un quotient exact $f(x)$ tel que $h(x) = f(x)(x - \alpha)$. Dans le cas tordu, une factorisation $L = PQ$ dans $A\langle\partial; \sigma, \delta\rangle$ (où A est un corps) a des propriétés différentes selon le facteur : une solution f de l'équation $Q \cdot f = 0$ est encore solution de $L \cdot f = 0$, car $L \cdot f = P \cdot (Q \cdot f) = P \cdot 0 = 0$; mais une solution g de P ne donne lieu à des solutions f de L que par la relation $Q \cdot f = g$. Inversement, une solution f de L donne lieu à un facteur droit d'ordre 1 de L, quitte à étendre A par f et tous ses itérés par σ et δ. Ce facteur est de la forme $\partial - (\partial \cdot f)/f$, c'est-à-dire $\partial - \delta(f)/f$ ou $\partial - \sigma(f)/f$ selon l'action de l'anneau de polynômes tordus sur les fonctions.

Les algorithmes de recherche de solutions dans des classes particulières fournissent donc implicitement, pour chaque solution trouvée, un facteur droit d'ordre 1. Plus précisément, dans le cas différentiel, une solution polynomiale ou rationnelle f d'une équation $L \cdot f = 0$ pour L dans l'anneau $\mathbb{Q}(x)\langle\partial_x; I, D_x\rangle$ fournit un facteur droit $D = \partial_x - D_x(f)/f$ où $D_x(f)/f$ est rationnel ; dans le cas à récurrence, une solution polynomiale, rationnelle ou hypergéométrique f d'une équation $L \cdot f = 0$ pour L dans l'anneau $\mathbb{Q}(x)\langle\partial_x; S_x\rangle$ fournit un facteur droit $D = \partial_x - S_x(f)/f$ où $S_x(f)/f$ est rationnel. Dans les deux cas, le quotient Q tel que $L = QD$ est aussi à coefficients rationnels.

Exercice 4. Un antimorphisme ϕ entre anneaux est une application $\mathbb{Q}$-linéaire qui renverse les produits : $\phi(PQ) = \phi(Q)\phi(P)$. Montrer l'existence d'antimorphismes $\mu : \mathbb{Q}(x)\langle\partial_x; I, D_x\rangle \to \mathbb{Q}(u)\langle\partial_u; I, D_u\rangle$ et $\nu : \mathbb{Q}(x)\langle\partial_x; S_x\rangle \to \mathbb{Q}(u)\langle\partial_u; S_u\rangle$, définis par les relations

$$\mu(x) = u, \quad \mu(\partial_x) = -\partial_u, \qquad \text{et} \qquad \nu(x) = -u, \quad \nu(\partial_x) = \partial_u.$$

Expliquer comment ces antimorphismes fournissent des facteurs gauches d'ordre 1 de polynômes tordus.

5. Algorithme d'Euclide

Rappelons qu'un idéal d'un anneau commutatif unitaire A est un sous-groupe additif de A clos par multiplication par les éléments de A. Il est classique que les anneaux commutatifs euclidiens — ceux dans lesquels l'existence d'un degré permet une division euclidienne — sont principaux — tout idéal peut être engendré par un unique générateur. C'est le cas des anneaux de polynômes commutatifs à coefficients dans un corps. Le p. g. c. d. p de deux polynômes f et g est alors l'unique polynôme unitaire engendrant l'idéal (f, g), somme des idéaux (f) et (g). Il se calcule comme dernier reste non nul par l'algorithme d'Euclide.

Pour un anneau de polynômes tordus $A = K\langle\partial;\sigma,\delta\rangle$ sur un corps K, la situation est la même si on prend soin de ne considérer que des idéaux à gauche, c'est-à-dire avec la clôture par multiplication à gauche par les éléments de A. Les notions qui en découlent sont celles de divisions euclidiennes à droite et de plus grands communs diviseurs à droite (p. g. c. d. d.). Soient P_0 et P_1 deux polynômes de A. Si P_1 n'est pas nul, on écrit la division euclidienne de P_0 par P_1, sous la forme $P_0 = Q_0P_1 + P_2$. Tant que P_{i+2} n'est pas nul, on itère en divisant P_{i+1} par P_{i+2}. Soit j la valeur finale de i, telle que $P_{j+1} \neq 0$ et $P_{j+2} = 0$. Alors :

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} Q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} Q_j & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{j+1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

d'où on déduit que P_{j+1} divise P_0 et P_1 à droite : $P_0 = FP_{j+1}$ et $P_1 = GP_{j+1}$ pour des polynômes tordus F et G adéquats. Puis en inversant les matrices

$$\begin{bmatrix} P_{j+1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & V \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} \qquad \text{pour} \qquad \begin{bmatrix} U & V \\ R & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -Q_j \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -Q_0 \end{bmatrix}.$$

En particulier, $P_{j+1} = UP_0 + VP_1$ est élément de l'idéal à gauche $AP_0 + AP_1$. Un élément quelconque $L = MP_0 + NP_1$ de cet idéal est aussi multiple de P_{j+1} : $L = (MF+NG)P_{j+1}$. En normalisant P_{j+1} pour le rendre unitaire, on obtient donc un p. g. c. d. d. distingué de P_0 et P_1. Par ailleurs, le polynôme tordu $RP_0 = -SP_1$ est un plus petit multiple commun à gauche (p. p. c. m. g.) de P_0 et P_1, par le même argument que dans le cas commutatif, en suivant de près les degrés tout au long de l'algorithme.

On a vu que les algorithmes de clôture par addition entre fonctions D-finies ou entre suites P-récursives renvoient un multiple commun à gauche des polynômes tordus L_f et L_g décrivant les deux objets f et g additionner. Comme ces algorithmes opèrent par degrés croissants, le polynôme renvoyé est de degré minimal en ∂, parmi ceux qui annulent la somme $f+g$. Le polynôme annulateur de la somme $f+g$ renvoyé par ces algorithmes est donc le p. p. c. m. g. de L_f et de L_g.

Exemple 2. Nous repartons des polynômes A et B de l'exemple 1 pour en calculer un p. g. c. d. d. et un p. p. c. m. g. On pose $P_0 = A$, $P_1 = B$; on a déjà calculé $P_2 = -n^{-1}(n^2+n+1)\big(\partial_n - (n+1)\big)$ avec $P_0 = n^{-1}(n^2-1)P_1 + P_2$. Il vient ensuite

$$P_1 = \left(-\frac{n(n+1)}{n^2+3n+3}\partial_n + \frac{n(n+1)}{n^2+n+1}\right) P_2 + 0.$$

Ainsi, le p. g. c. d. d. unitaire est $\partial_n - (n+1)$. Remarquons qu'il annule les solutions communes de A et B, à savoir les multiples de $n!$. Le p. p. c. m. g unitaire s'obtient par renormalisation de $Q_1P_0 = (Q_1Q_0 + 1)P_1$:

$$\partial_n^3 - \frac{n^3+6n^2+8n+5}{n^2+n+1}\partial_n^2 + \frac{2n^3+9n^2+13n+7}{n^2+n+1}\partial_n - \frac{(n^2+3n+3)(n+1)}{n^2+n+1}.$$

Notons que ses solutions sont toutes les solutions de A et B : les combinaisons linéaires de $n!$, n et 1.

6. Relations de contiguïté

Un grand nombre de fonctions spéciales sont en fait des fonctions $f_n(x)$ d'une variable continue x et d'une variable discrète n. Les familles de telles fonctions dont l'intérêt a été relevé, par exemple par la physique mathématique, sont telles que la dépendance en x est liée à la dépendance en n. Il apparaît que très fréquemment, la fonction $f_{n+\alpha}(x)$, pour $\alpha = \pm 1$, est reliée à la fonction $f_n(x)$ et à ses dérivées. C'est le cas pour la classe importante des *fonctions hypergéométriques*, c'est-à-dire, essentiellement, pour les séries génératrices de suites hypergéométriques, et pour des fonctions limites de fonctions hypergéométriques, dont un certain nombre de familles de polynômes orthogonaux classiques, et pour des généralisations.

Dans cette section, nous considérons des fonctions D-finies paramétrées et résolvons algorithmiquement des problèmes tels que la détermination d'une relation de la forme

$$f_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i(x) f_n^{(i)}(x)$$

pour la suite de polynômes

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 x^k.$$

Ici, la relation explicite est

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) = 12\frac{x^3(x+1)}{(n+1)^3} f_n'''(x) + 4\frac{x^2(2n+2xn+11+14x)}{(n+1)^3} f_n''(x) \\ - 4\frac{x(5xn^2-n^2-4n-6+2xn-9x)}{(n+1)^3} f_n'(x) - \frac{16xn-n-1+4x}{n+1} f_n(x). \end{aligned}$$

L'opérateur différentiel linéaire implicitement au membre droit s'appelle un *opérateur de montée* ; un opérateur qui donnerait $f_{n-1}(x)$ s'appelle un *opérateur de descente*. Une relation linéaire entre les decalées $f_{n+i}(x)$ et ne faisant intervenir aucune dérivation s'appelle une *relation de contiguïté*.

6.1. Fonction hypergéométrique de Gauss. La plus simple des fonctions hypergéométriques est la fonction hypergéométrique de Gauss, définie par

$$F(a,b;c;x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{avec} \qquad (s)_n = s(s+1)\cdots(s+n-1) = \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)}.$$

(Ici, la fonction $\Gamma(s)$ est la fonction classique qui interpole la factorielle.)

Oublions la dépendance en b et c du coefficient de x^k dans cette somme, coefficient que nous notons $u_{a,k}$. Nous avons

$$u_{a,k+1} = \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)(k+1)} u_{a,k} \qquad \text{et} \qquad u_{a+1,k} = \left(\frac{k}{a}+1\right) u_{a,k}.$$

La première de ces identités nous fournit le polynôme tordu

$$(c+k)(k+1)\partial_k - (a+k)(b+k)$$

qui annule u. Pour $k = -1$, cette récurrence impose $u_{a,-1} = 0$, ce qui permet d'étendre la suite u à toute valeur $k \in \mathbb{Z}$ tout en continuant de vérifier la récurrence. Par le morphisme qui effectue le passage à la série génératrice, nous obtenons

$$\begin{aligned} &(c + x\partial_x)(x\partial_x + 1)x^{-1} - (a + x\partial_x)(b + x\partial_x) \\ &\qquad = \big((x\partial_x)^2 + (c+1)x\partial_x + c\big)x^{-1} - \big((x\partial_x)^2 + (a+b)x\partial_x + ab\big) \\ &\qquad\qquad = x(1-x)\partial_x^2 + \big(c - (a+b+1)x\big)\partial_x - ab. \end{aligned}$$

Notons L ce polynôme tordu en ∂_x. La deuxième identité sur u donne, après sommation, $F(a+1,b;c;x) = (a^{-1}x\partial_x + 1)\cdot F(a,b;c;x)$; c'est-à-dire qu'un opérateur de montée est donné par le polynôme tordu $L_\uparrow = a^{-1}x\partial_x + 1$.

Définissons $G(a,b;c;x)$ comme étant $F(a+1,b;c;x)$. Supposons qu'il existe un inverse V de $L_\uparrow$ modulo L à droite. Alors $VL_\uparrow - 1$ est un multiple à gauche de L, qui annule donc F. Ainsi, $F = VL_\uparrow \cdot F = V\cdot G$, autrement dit, V représente un opérateur de descente de G. On obtient un opérateur de descente pour F par un simple décalage arrière de a dans V. La division euclidienne

$$L = Q(a^{-1}x\partial_x+1)-(c-a-1)ax^{-1} \qquad \text{où} \qquad Q = a(1-x)\partial_x+(c-a-1)ax^{-1}-ab$$

donne l'opérateur de descente après avoir décalé a dans $(c-a-1)^{-1}a^{-1}xQ$ par

$$L_\downarrow = \frac{x(1-x)}{a-c}\partial_x - \frac{bx}{a-c} - 1.$$

Notre objectif est maintenant de calculer une relation de contiguïté pour F. Nous avons obtenu $L_\uparrow(a)\cdot F = \partial_a \cdot F$, où nous avons noté explicitement la dépendance en a du polynôme tordu $L_\uparrow$. Il s'ensuit la relation

$$\partial_a^i \cdot F = L_{\uparrow,i}(a)\cdot F \qquad \text{où} \qquad L_\uparrow(a)L_\uparrow(a+1)\cdots L_\uparrow(a+i-1)\cdot F,$$

dans laquelle nous pouvons, comme toujours, remplacer un polynôme agissant sur la fonction F par le reste de la division euclidienne de ce polynôme par L, qui annule F. Ainsi, une relation de contiguïté s'obtient en recherchant une combinaison linéaire, à coefficients dans $\mathbb{Q}(a,b,c,x)$ des restes modulo L à droite des $L_{\uparrow,i}(a)$ pour $i = 0,1,2$.

Exercice 5. Terminer ce calcul pour retrouver :

$$\begin{aligned}(a+1)(1-x)F(a+2,b;c;x) + \big(c - xb + (a+1)(x-2)\big)F(a+1,b;c;x)&\\ + (a-c+1)F(a,b;c;x) = 0.&\end{aligned}$$

6.2. Extension aux séries partiellement hypergéométriques. Nous considérons maintenant des sommes

$$f_n(x) = \sum_{k\geq 0} u_{n,k}x^k$$

dans lesquelles u n'est hypergéométrique qu'en n, mais est seulement P-récursive en k, et satisfait à la relation

$$a_p(n,k)u_{n,k+p} + \cdots + a_0(n,k)u_{n,k} = 0.$$

Comme dans le cas doublement hypergéométrique, cette relation fournit une relation purement différentielle sur f. Comme précédemment, aussi, la relation de récurrence du premier order en n sur u donne une expression de $f_{n+1}(x)$ comme combinaison linéaire de dérivées. On procède donc comme dans la section précédente pour calculer opérateurs de montée, de descente, et relations de contiguïté.

Exercice 6 (Assez calculatoire). Calculer l'opérateur de montée annoncé dans l'introduction de cette section.

Bibliographie

[1] Bronstein (M.) and Petkovšek (M.). – On Ore rings, linear operators and factorisation. *Programmirovanie*, vol. 1, 1994, pp. 27–44. – Also available as Research Report 200, Informatik, ETH Zürich.

[2] Bronstein (Manuel) and Petkovšek (Marko). – An introduction to pseudo-linear algebra. *Theoretical Computer Science*, vol. 157, 1996, pp. 3–33.

[3] Chyzak (Frédéric) and Salvy (Bruno). – Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate holonomic identities. *Journal of Symbolic Computation*, vol. 26, n° 2, August 1998, pp. 187–227.

[4] Ore (Oystein). – Linear equations in non-commutative fields. *Annals of Mathematics*, vol. 32, 1931, pp. 463–477.

[5] Ore (Oystein). – Theory of non-commutative polynomials. *Annals of Mathematics*, vol. 34, 1933, pp. 480–508.

[6] Takayama (Nobuki). – Gröbner basis and the problem of contiguous relations. *Japan Journal of Applied Mathematics*, vol. 6, n° 1, 1989, pp. 147–160.