# Assistants de Preuve
# Preuve de Programmes impératifs

Christine Paulin-Mohring & Jean-Christophe Filliâtre

Université Paris-Sud 11, INRIA

27/01/09

# Preuve de programmes impératifs

Coq est un outil de choix pour la preuve de programmes purement applicatifs

Qu'en est-il de la preuve de programmes **impératifs** ?

# Plan

1. Monades en Coq
2. Logique de Hoare
   - Principes
   - Mise en œuvre dans Coq
3. Structures de données complexes
   - Manipulation de tableaux
   - Modèles avancés de la mémoire

# Les monades

Utilisées en Haskell pour simuler les traits impératifs

Une monade est la donnée

- d'un opérateur de type $\texttt{M} : \texttt{Type} \to \texttt{Type}$
  $\texttt{M}\ A$ représente les calculs de type $A$
- d'une opération $\texttt{return} : A \to \texttt{M}\ A$
  (aussi notée `unit`) où `return` $v$ désigne la valeur $v$ vue comme un calcul
- d'une opération $\texttt{bind} : \texttt{M}\ A \to (A \to \texttt{M}\ B) \to \texttt{M}\ B$
  `bind` séquence deux calculs

Syntaxe Haskell : **`do p <- e1; e2`** dénote `bind` $e_1\ \lambda p.\ e_2$

# Monades : axiomes

Les opérateurs doivent vérifier **les trois lois** suivantes :

$$\texttt{bind}\,(\texttt{return}\,x)\,f = f\,x$$

$$\texttt{bind}\,m\,\texttt{return} = m$$

$$\texttt{bind}\,m\,(\lambda x.\texttt{bind}\,(f\,x)\,g) = \texttt{bind}\,(\texttt{bind}\,m\,f)\,g$$

# Combinaison : la monade d'état et d'erreur

en général, on ne sait pas combiner deux monades pour en faire une troisième
dans la cas des monades d'erreur et d'état, on peut

on a même deux solutions :

- $\mathtt{M}\ A = S \to \mathtt{Error} \mid \mathtt{Value\ of}\ (S \times A)$

ou

- $\mathtt{M}\ A = S \to S \times (\mathtt{Error} \mid \mathtt{Value\ of}\ A)$

les opérateurs se définissent aisément dans les deux cas

# La monade d'état et d'erreur dans Coq

**type de la monade** (pour un certain type d'état `state`)

```
Set Implicit Arguments.

Inductive res (A: Type) : Type :=
  | Error: res A
  | OK: A → state → res A.

Definition M (A: Type) : Type := state → res A.
```

# La monade d'état et d'erreur dans Coq

## Opérations de la monade

```
Definition ret (A: Type) (x: A) : M A :=
  fun (s: state) ⇒ OK x s.

Definition error (A: Type) : M A :=
  fun (s: state) ⇒ Error A.

Definition bind (A B: Type) (f: M A) (g: A→M B): M B
  := fun (s: state) ⇒
       match f s with
       | Error ⇒ Error B
       | OK a s' ⇒ g a s'
       end.

Notation "'do' X <- A ; B" := (bind A (fun X ⇒ B))
  (at level 200, X ident, A at level 100, B at level 200).
```

# Application : un compteur

soit un compteur utilisant une référence (*gensym*) i.e.

```
let fresh = let r = ref 0 in fun () → incr r; !r
```

```
Definition state := nat.
...
Definition fresh : M nat := fun s ⇒ OK s (S s).

Fixpoint list_n (n:nat) { struct n } : M (list nat) :=
  match n with
  | O ⇒ ret nil
  | S n' ⇒ do k <- fresh; do l <- list_n n'; ret (k :: l)
  end.
```

le programme utilisant les monades peut être prouvé dans Coq par les techniques déjà vues

# Plan

# Logique de Hoare

**petit langage impératif très simplifié**

$$
\begin{array}{rcl}
e & ::= & n \mid x \mid e\ op\ e \\
op & ::= & + \mid - \mid \times \mid / \mid = \mid \neq \mid < \mid > \mid \leq \mid \geq \mid and \mid or \\
i & ::= & \texttt{skip} \mid x := e \mid i;\ i \mid \texttt{if}\ e\ \texttt{then}\ i\ \texttt{else}\ i \mid \texttt{while}\ e\ \texttt{do}\ i\ \texttt{done}
\end{array}
$$

**exemple** : soit ISQRT le programme

```
count := 0; sum := 1;
while sum <= n do
  count := count + 1; sum := sum + 2 * count + 1
done
```

**affirmation** : à la fin du programme, `count` contient $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$

# Sémantique opérationnelle

état = fonction $E$ associant à chaque variable sa valeur

$$\begin{aligned} E(n) &= n \\ E(x) &= E(x) \\ E(e_1\ op\ e_2) &= E(e_1)\ op\ E(e_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &\xrightarrow[x:=e]{} E\{x = E(e)\} \\
E_1 &\xrightarrow[i_1;i_2]{} E_3 \text{ si } E_1 \xrightarrow[i_1]{} E_2 \text{ et } E_2 \xrightarrow[i_2]{} E_3 \\
E_1 &\xrightarrow[\text{if } e \text{ then } i_1 \text{ else } i_2]{} E_2 \text{ si } E_1(e) = \mathit{true} \text{ et } E_1 \xrightarrow[i_1]{} E_2 \\
E_1 &\xrightarrow[\text{if } e \text{ then } i_1 \text{ else } i_2]{} E_2 \text{ si } E_1(e) = \mathit{false} \text{ et } E_1 \xrightarrow[i_2]{} E_2 \\
E_1 &\xrightarrow[\text{while } e \text{ do } i]{} E_3 \text{ si } E_1(e) = \mathit{true}, E_1 \xrightarrow[i]{} E_2 \text{ et } E_2 \xrightarrow[\text{while } e \text{ do } i]{} E_3 \\
E &\xrightarrow[\text{while } e \text{ do } i]{} E \text{ si } E(e) = \mathit{false}
\end{aligned}$$

# Triplets de Hoare

un **triplet de Hoare** est un triplet noté

$$\{P\}\ i\ \{Q\}$$

où $P$ et $Q$ sont des formules du premier ordre partageant leurs expressions (et donc leurs variables) avec les programmes
**validité** : le triplet $\{P\}\ i\ \{Q\}$ est valide si pour tous états $E_1$ et $E_2$ tels que $E_1(P)$ est vrai et $E_1 \xrightarrow[i]{} E_2$, alors $E_2(Q)$ est vrai
exemple : on souhaite montrer la validité du triplet

$$\{n \geq 0\}\ \mathit{ISQRT}\ \{\mathit{count} \times \mathit{count} \leq n \wedge n < (\mathit{count} + 1) \times (\mathit{count} + 1)\}$$

# Règles de la logique de Hoare

logique de Hoare = ensemble de règles de déduction sur les triplets

$$\frac{}{\{P\}\ \texttt{skip}\ \{P\}} \qquad \frac{\{P \wedge e = \mathit{true}\}\ i_1\ \{Q\} \qquad \{P \wedge e = \mathit{false}\}\ i_2\ \{Q\}}{\{P\}\ \texttt{if}\ e\ \texttt{then}\ i_1\ \texttt{else}\ i_2\ \{Q\}}$$

$$\frac{}{\{P[x \leftarrow e]\}\ x := e\ \{P\}} \qquad \frac{\{I \wedge e = \mathit{true}\}\ i\ \{I\}}{\{I\}\ \texttt{while}\ e\ \texttt{do}\ i\ \texttt{done}\ \{I \wedge e = \mathit{false}\}}$$

$$\frac{\{P\}\ i_1\ \{Q\} \qquad \{Q\}\ i_2\ \{R\}}{\{P\}\ i_1;\ i_2\ \{R\}} \qquad \frac{\{P'\}\ i\ \{Q'\} \qquad P \Rightarrow P' \qquad Q' \Rightarrow Q}{\{P\}\ i\ \{Q\}}$$

# Correction et complétude

- **Correction** : cet ensemble de règles est correct i.e. tout triplet dérivable est correct
- **Difficulté** : il faut deviner les bonnes annotations intermédiaires (pour ISQRT par exemple, il faut exhiber un **invariant de boucle**)
- **Point de vue théorique** : a-t-on la **complétude** de la logique de Hoare i.e. peut-on prouver tous les triplets valides ?

# Complétude et calcul de plus faibles préconditions

pour $i$ et $Q$ donnés, l'ensemble des $P$ tel que $\{P\}\ i\ \{Q\}$ est valide possède, s'il est non vide, un élément **minimal** $P_0$, i.e. tel que si $\{P\}\ i\ \{Q\}$ est valide alors $P$ implique $P_0$
notons $\boldsymbol{WP}(i, Q)$ cet élément minimal ; il se calcule par récurrence sur $i$

$$
\begin{array}{rcl}
WP(x := e, Q) & = & Q\{x \leftarrow e\} \\
WP(i_1; i_2, Q) & = & WP(i_1, WP(i_2, Q)) \\
WP(\mathit{if}\ e\ \mathit{then}\ i_1\ \mathit{else}\ i_2, Q) & = & (e = \mathit{true} \Rightarrow WP(i_1, Q)) \wedge \\
 & & (e = \mathit{false} \Rightarrow WP(i_2, Q)) \\
WP(\mathit{while}\ e\ \mathit{do}\ i, Q) & = & \text{pas de formule simple !}
\end{array}
$$

$WP(i, Q)$ s'appelle la **plus faible précondition** de $i$ et $Q$

# Complétude

Le calcul des *WP* donne les annotations intermédiaires

**complétude** : l'ensemble des règles de la logique de Hoare est *relativement* complet i.e. tout triplet $\{P\}\ i\ \{Q\}$ valide est dérivable (en particulier, on peut trouver des invariants pour les boucles `while` de $i$)

**hypothèse** : la logique dans laquelle on exprime les annotations est suffisamment expressive (en particulier pour exprimer les invariants de boucle)

# Mise en œuvre dans Coq

comment mettre en œuvre la logique de Hoare dans Coq ?
deux solutions

- **deep embedding**
  on formalise la logique de Hoare i.e. on internalise les notions de termes, instructions, règles de Hoare, etc.
  $\Rightarrow$ utile pour montrer la correction ou la complétude (méta-théorie) mais lourd sur des exemples concrets
- **shallow embedding**
  un programme est directement interprété par sa sémantique et les règles de la logique de Hoare correspondent à des tactiques
  $\Rightarrow$ utilisable sur des exemples concrets mais la méta-théorie n'est plus possible

# En pratique

En pratique, on apprécie les quelques extensions suivantes :

- avoir des effets de bord dans les expressions
- désigner dans une annotation la valeur d'une variable à un instant antérieur (par exemple au début du programme)
- traiter l'appel de sous-programmes (modularité)
- prouver la terminaison des programmes
- supporter des constructions comme `break` ou `continue` (et plus généralement des exceptions)
- **avoir des structures de données complexes : tableaux, enregistrements, pointeurs, objets, etc.**

# Outil Why

`http://why.lri.fr`

- Un langage fonctionnel avec des traits impératifs (références, exceptions)
- Pas d'alias entre références
- Analyse d'effets : variables lues et écrites, exceptions levées
- Description modulaire des programmes et des spécifications
- Calcul de plus faibles péconditions
- Génération d'obligations de preuve pour des démonstrateurs interactifs (Coq, Isabelle, PVS) ou automatiques (Ergo, Simplify)

# Exemple : racine carrée

```
let isqrt (n:int) =
  { n >= 0 }
  let count = ref 0 in
  let sum = ref 1 in
  while !sum <= n do
    { invariant count >= 0 and n >= count*count
            and sum = (count+1)*(count+1)
      variant n - sum }
    count := !count + 1;
    sum := !sum + 2 * !count + 1
  done;
  !count
  { result >= 0 and
    result * result <= n < (result+1)*(result+1) }
```

# Plan

# Structures de données complexes

la règle d'affectation de la logique de Hoare

$$\overline{\{P[x \leftarrow e]\}\ x := e\ \{P\}}$$

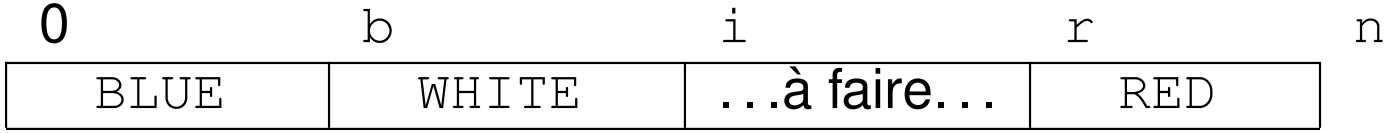
contient implicitement le fait que

- les expressions comme $e$ sont partagées entre les programmes et la logique
- il n'y a **pas d'alias** entre les variables du programme

pour traiter des structures de données complexes avec la logique de Hoare traditionnelle, il va falloir les **modéliser**

# Exemple des tableaux : le drapeau hollandais

le drapeau hollandais de Dijkstra : trier un tableau dont les éléments ne prennent que trois valeurs différentes (bleu, blanc, rouge)



# Quelques lignes de C

```
typedef enum { BLUE, WHITE, RED } color;

void swap(int t[], int i, int j) {
  color c = t[i]; t[i] = t[j]; t[j] = c;
}

void flag(int t[], int n) {
  int b = 0, i = 0, r = n;
  while (i < r) {
    switch (t[i]) {
    case BLUE: swap(t, b++, i++); break;
    case WHITE: i++; break;
    case RED: swap(t, --r, i); break;
    }
  }
}
```

# Modélisation

on ne va pas vérifier le code C, mais une **modélisation**
on modélise

- les couleurs par un **type abstrait**
- les tableaux en utilisant des références contenant des **tableaux applicatifs**

# Un type abstrait pour les couleurs

```
type color

logic blue : color
logic white : color
logic red : color

predicate is_color(c:color) = c=blue or c=white or c=red

parameter eq_color  :
  c1:color → c2:color →
    {} bool { if result then c1=c2 else c1≠c2 }
```

# Des tableaux applicatifs

```
type color_array

logic acc : color_array, int → color
logic upd : color_array, int, color → color_array

axiom acc_upd_eq :
  ∀a:color_array. ∀i:int. ∀c:color.
    acc(upd(a,i,c),i) = c

axiom acc_upd_neq :
  ∀a:color_array. ∀i,j:int. ∀c:color.
    i ≠ j → acc(upd(a,j,c),i) = acc(a,i)
```

# Accès aux tableaux dans les bornes

```
logic length : color_array → int

axiom length_update :
  ∀a:color_array. ∀i:int. ∀c:color.
    length(upd(a,i,c)) = length(a)

parameter get :
  t:color_array ref → i:int →
    { 0<=i<length(t) } color reads t { result=acc(t,i) }

parameter set :
  t:color_array ref → i:int → c:color →
    { 0<=i<length(t) } unit writes t { t=upd(t@,i,c) }
```

# La fonction `swap`

```
let swap (t:color_array ref) (i:int) (j:int) =
  { 0 <= i < length(t) and 0 <= j < length(t) }
  let u = get t i in
  set t i (get t j);
  set t j u
  { t = upd(upd(t@,i,acc(t@,j)), j, acc(t@,i)) }
```

Obligations de preuve automatiquement prouvées par Alt-Ergo

# Le code de la fonction de tri

```
let dutch_flag (t:color_array ref) (n:int) =
  let b = ref 0 in
  let i = ref 0 in
  let r = ref n in
  while !i < !r do
     if eq_color (get t !i) blue then begin
       swap t !b !i;
       b := !b + 1;
       i := !i + 1
     end else if eq_color (get t !i) white then
       i := !i + 1
     else begin
       r := !r - 1;
       swap t !r !i
     end
  done
```

# Spécification de la fonction de tri

```
predicate monochrome(t:color_array,i:int,j:int,c:color) =
  ∀k:int. i<=k<j → acc(t,k)=c

let dutch_flag (t:color_array ref) (n:int) =
  { 0 <= n and length(t) = n and
    ∀k:int. 0 <= k < n → is_color(acc(t,k)) }
  ⋮
  { ∃b:int. ∃r:int.
      monochrome(t,0,b,blue) and
      monochrome(t,b,r,white) and
      monochrome(t,r,n,red) }
```

# Invariant de boucle

```
  ⋮
while !i < !r do
   { invariant 0 <= b <= i and i <= r <= n and
               monochrome(t,0,b,blue) and
               monochrome(t,b,i,white) and
               monochrome(t,r,n,red) and
               length(t) = n and
               ∀k:int. 0 <= k < n → is_color(acc(t,k))
     variant r - i }
   ⋮
done
```

# Obligations de preuve

- l'invariant est vrai initialement
- l'invariant est préservé et le variant diminue
- la précondition de `swap`
- l'accès au tableau dans les bornes
- la postcondition est satisfaite à l'issue de la fonction

**Toutes automatiquement prouvées par Alt-Ergo !**

Remarque : pour être complet, il faut montrer que le multi-ensemble des éléments n'a pas changé

# Preuve de programmes Java

- Chaque objet est une référence, deux variables différentes peuvent représenter le même emplacement.
- Modèle simple : la mémoire vue comme un grand tableau
  - mais les obligations de preuve sont rapidement **trop complexes** (car tous les pointeurs sont potentiellement identiques)
- Modèle plus fin : on exploite une information statique pour **séparer** la mémoire en différentes composantes

# Le modèle de Burstall-Bornat

La mémoire d'un programme Java est séparée selon les **attributs**.

- Si $a$ et $b$ sont deux attributs distincts alors les deux expressions $e_1.a$ et $e_2.b$ ne peuvent jamais représenter le même emplacement mémoire.
- modèle global : on modélise $e_1.a$ par $M[e_1 + \texttt{offset}(a)]$ avec $M$ une mémoire globale
- modèle à la Burstall-Bornat : on introduit une mémoire $A$ pour l'attribut $a$ et on modélise $e_1.a$ par $A[e_1]$
- de même les tableaux d'entiers ou les tableaux d'objets peuvent être séparés
- d'autres séparations peuvent être déduites d'analyses statiques
- une table `heap` garde trace des adresses allouées, des types dynamiques et tailles de tableau

# Spécification

## Idée de JML (Java Modeling Language)

```
class Purse {
    //@ public invariant balance >= 0;
    int balance;

    /*@ public normal_behavior
      @   requires s >= 0;
      @   modifiable balance;
      @   ensures balance == \old(balance)+s;
      @*/
    public void credit(int s) {
        balance += s;
    }
```

# Comportement exceptionnel

```
/*@ public behavior
  @  requires s >= 0;
  @  modifiable balance;
  @  ensures s<=\old(balance) && balance==\old(balance)-s;
  @  signals (NoCreditException)
  @          s > balance && balance == \old(balance);
  @*/
```

```
public void withdraw(int s) throws NoCreditException
  {
      if (balance >= s)
      { balance -= s; }
      else { throw new NoCreditException(); }
  }
```

# Traduction vers Why

- Modélisation du programme et de la spécification
  - Ensemble de déclarations et d'axiomes validés par un modèle Coq
  - Ensemble de procédures élémentaires spécifiées pour les constructions de base du langage
- Les conditions **assigns** correspondent à des contraintes de non modification de portions de la mémoire (ne concerne que les variables Why modifiées)
- Les exceptions servent à modéliser les structures de contrôle comme **break**, **return** ...

# Modélisation Coq

La théorie Coq sous-jacente :

```
Inductive value : Type :=
  | Null : value | Ref : adrObject → value.

Inductive tag : Type :=
  | Obj : classId → tag
  | Arr : Z → Arrkind → tag.

Definition alloc_table := pmap.t adrObject tag.

Definition memory A := map.t value A.

Definition mod_loc := value → Prop.

Definition modifiable A (h:store) (m m':memory A)
                        (unchanged:mod_loc) : Prop :=
  ∀v:value, alive h v → unchanged v → acc m v = acc m' v.
```

# Modélisation Why

## Modélisation logique

```
type value
type tag
type classId
type javaType
type alloc_table
type 'a memory

logic acc : 'a memory, value → 'a

logic Obj : classId → tag
logic typeof : alloc_table, value, javaType → prop

logic Null : → value
```

# Modélisation Why

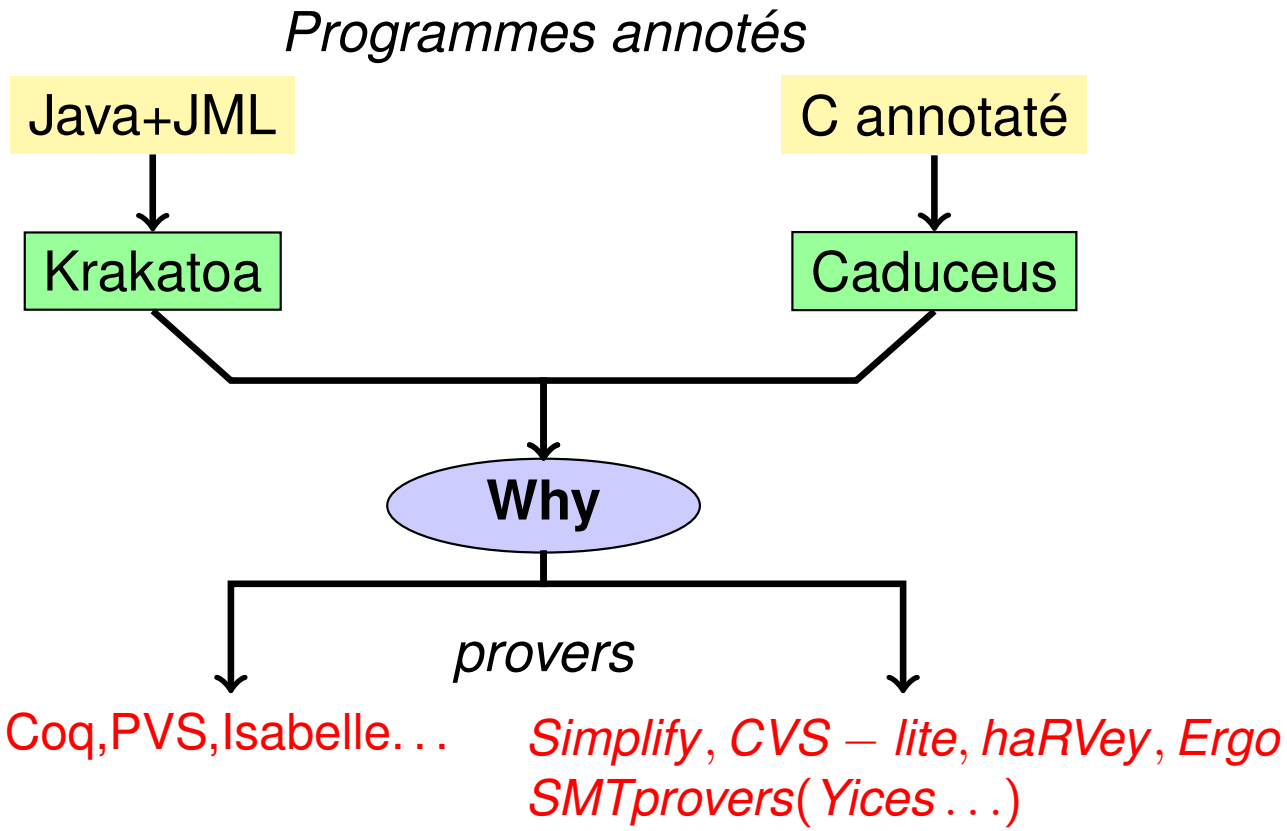
## Modélisation calculatoire

```
exception Exception of value
exception Return_value of value

parameter alloc : alloc_table ref
parameter intA : int memarray ref
parameter objA : value memarray ref
parameter new_ref : alloc_table → value
parameter allocate
    : alloc_table → value → tag → alloc_table

parameter alloc_new_obj : c : classId →
    { } value writes alloc
    { result ≠ Null
      and fresh(alloc@, result)
      and typeof(alloc, result, ClassType(c))
      and store_extends(alloc@,alloc)
    }
```

# Architecture de Why




- Une grande souplesse dans la conception du modèle
- Adaptation pour modéliser la mémoire des cartes à puces et les arrachages

# Modélisation de code C

Outil Caduceus, plateforme Frama-C

- Les champs de structure jouent le rôle des attributs
- Moins de contraintes de type dans le langage (arithmétique de pointeur, casts . . . )
- Nécessite une modélisation de plus bas niveau ou une analyse statique plus complexe.
- Langage de spécification à la JML en cours d'élaboration (ACSL)
- Constructions de programme comme **goto** qui demandent d'associer des invariants à des points de programmes arbitraires
- Quelques exemples réalisés :
  - Schorr-Waite (manipulation de pointeurs pour les gc)
  - Absence de menace dans du code utilisé chez Dassault (70 kloc, 116k obligations, 96% prouvées automatiquement)