Automates avancés - TD1

Exercice 1 Donnez des expressions rationnelles pour les langages suivants.

- $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* : w$ a deux ou trois occurrences de 0 dont les deux premières ne sont pas consécutifs $\}$
- $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* : w$ ne contient pas le facteur $aa\}$
- $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* : w$ a exactement une occurrence du facteur $aa\}$

Exercice 2 Donnez directement des automates finis déterministes qui reconnaissent les langages de l'exercice 1.

Exercice 3 Donnez un automate fini déterministes qui reconnaît le langage $\{w \in \{a,b\}^* : w$ a $3k+1$ occurrences de b pour un $k \geq 0\}$.

Exercice 4 Donnez si possible des expression rationnelles plus simples qui définissent le même langage

- $\emptyset + a^* + b^* + (a+b)^*$
- $((a^*b^*)^*(b^*a^*)^*)^*$
- $(a^*b)^* + (b^*a)^*$
- $(a+b)^*a(a+b)^*$

Exercice 5 À partir d'une expression rationnelle on peut construire un automate fini qui reconnaît le même langage. La première méthode est celle de Thompson utilisant des ϵ-transitions. Elle est définie d'une façon inductive.

- Si l'expression rationnelle est de la forme a ou ϵ on peut donne facilement un automate
- Si l'expression rationnelle est de la forme E_1E_2 on construit d'abord deux automates pour E_1 et E_2 et ensuite on les compose pour obtenir E_1E_2. Comment ?
- Si l'expression rationnelle est de la forme $E_1 + E_2$ on construit d'abord deux automates pour E_1 et E_2 et ensuite on les compose pour obtenir $E_1 + E_2$. Comment ?
- Si l'expression rationnelle est de la forme E^* on construit d'abord un automate pour E et ensuite l'automate pour E^*. Comment ?

Construisez un automate pour l'expression

- $(a+b)^*(b+\epsilon)a$

Exercice 6 La deuxième construction est celle de Glushkov. Soit E l'expression à traduire. Tous les symboles de l'alphabet qui apparaissent dans l'expression sont numéroter de 1 jusqu'au nombre total n d'occurrences. Les occurrences sont appelées positions et on obtient E' en remplaçant dans E tous les symboles par leur numéro d'occurrence. E' est une expression rationnelle sur $\{1,\ldots,n\}$. Si a est a une position i, on dit que i correspond à a. Nous définissons trois ensembles de positions:

- $first(E)$ est l'ensemble de toutes les positions qui peuvent commencer un mot de $L(E')$.
- $last(E)$ est l'ensemble de toutes les positions qui peuvent être à la fin d'un mot de $L(E')$.
- $follow(i, E)$ est l'ensemble de toutes les positions qui peuvent suivre la position i dans $L(E')$.

Ensuite on peut construire un automate avec états $\{0, 1, \ldots, n\}$, 0 est l'état initial, n l'état final et les transitions sont $\{(i, a, j) : j$ correspond à a et $j \in follow(i, E)$ ou $i = 0$ et $j \in first(E)\}$.

Construisez un automate pour l'expression

- $(a + b)^*(b + \epsilon)a$

Exercice 7 Il est aussi possible de construire un expression rationnelle à partir d'un automate.

Construisez l'expression rationnelle à partir de l'automate de l'exercice 3.