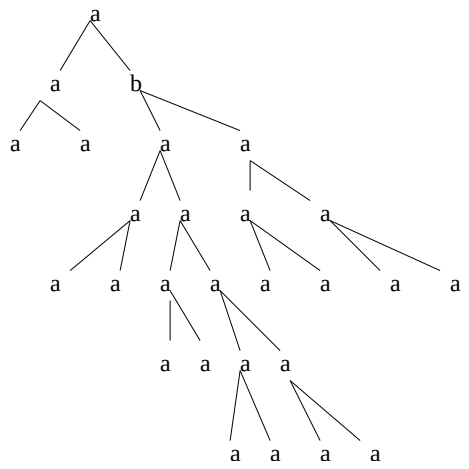
Automates avancés - TD 11

Exercice 1 Donnez un automate d'arbre (du bas vers le haut) pour le langage de tous les arbres binaires sur l'alphabet $\{a, b\}$ tel que toutes les branches des arbres sont dans le langage $(a+b)^*aaa$. Donnez le calcul de votre automate sur l'arbre suivant :



Exercice 2 On définit la distance entre deux feuilles d'un arbre comme la longueur du plus petit chemin entre les deux feuilles. Soit L le langages des arbres binaires sur l'alphabet $\{a, b\}$ tel que pour toute feuille il y a une feuille à distance inférieure ou égal à 4.

- Donnez quelques arbres dans L est quelques arbres qui ne sont pas dans L.
- Donnez un automate d'arbre pour L.

Exercice 3 Soit $\Sigma = \{f, g, a\}$. Nous considérons le langage d'arbre $L = \{f(g^i, g^i) \mid i > 0\}$. Montrez que L n'est pas régulier (accepté par un automate d'arbre).
Indications : Supposez qu'il y a un automate d'arbre avec k états qui reconnaît L. Considérez le terme $f(g^k, g^k)$.

Exercice 4 Le raisonnement de la solution de l'exercice 1 peut être généralisé. On obtient un lemme d'itération pour les langages réguliers d'arbre :

Soit L un langage régulier d'arbre. Alors il existe une constante $k > 0$ avec : Pour chaque arbre t dans L tel que $hauteur(t) > k$, il existe un contexte C, un contexte non-trivial C_1 et un arbre u tel que $t = C[C_1[u]]$ et, pour tout $n \geq 0$ on a $C[{C_1}^n[u]] \in L$.

- Quel est k ?
- Montrez : Soit $A = (Q, \Sigma, Q_f, \Delta)$ un automate d'arbre. Alors
  1. $L(A)$ n'est pas vide si et seulement si il existe un arbre t dans $L(A)$ avec $hauteur(t) \leq |Q|$.
  2. $L(A)$ est infini si et seulement si il existe un arbre t dans $L(A)$ avec $|Q| < hauteur(t) \leq 2|Q|$.

Exercice 5 Montrez en utilisant un argument proche du lemme d'itération que le langage de tous les arbres sur l'alphabet $\{f, a\}$ tel que la branche la plus longue est de taille paire n'est pas régulier.