TD6. D'après un article de M.Minsky et S.Papert (MIT, 1965)

Soit $A \subseteq \mathbb{N}^*$. On s'intéresse au langage représentant A en base 2 et on cherche un critère pour dire que ce langage n'est pas rationnel. On dira que A est rationnel si le langage associé l'est. Les AF considérés lisent d'abord les bits de poids fort et refusent les mots commençant par "0". On s'autorisera de légers abus de notation : concaténation de deux entiers, etc. Le critère recherché fait appel à une notion simple de densité. On note $\pi_A(n)$ le cardinal de $[\![1, n]\!] \cap A$.

Question 1. *Soit $L \subseteq \{0,1\}^*$ un langage rationnel. Montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout mot x vérifiant $x^{-1}L \neq \emptyset$, il existe un mot y tel que*

$$|y| < N \text{ et } xy \in L$$

Question 2. *Soit $A \subseteq \mathbb{N}^*$ un ensemble rationnel infini. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\forall n, \pi_A(n) > K \log(n) - 1$$

Question 3. *Soit $A \subseteq \mathbb{N}^*$. Soit α un entier qui n'est préfixe d'aucun élément de A. Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}$*

$$A \cap [\![2^m\alpha, 2^m(\alpha+1) - 1]\!] = \emptyset$$

Question 4. *Soit $A \subseteq \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^{-1}A = \emptyset$. On suppose que la suite*

$$\left(\frac{\pi_A(n)}{\pi_A(\frac{\alpha+1}{\alpha}n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge. Montrer que sa limite est 1.

Question 5. *Soit $A \subseteq \mathbb{N}^*$ un ensemble infini dont un des résiduels est vide. Soit a_r le r-ième élément de A selon l'ordre usuel. Montrer que la suite*

$$\left(\frac{a_{r+1} - a_r}{a_r}\right)$$

ne converge pas vers 0.

Question 6. *Soit $A \subseteq \mathbb{N}^*$ un ensemble rationnel dont aucun résiduel n'est vide, montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n,*

$$\frac{\pi_A(n)}{n} \geq 2^{-N}$$

Question 7. *Déduire des questions précédentes le critère suivant.*
Un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}^*$ infini n'est pas rationnel si il vérifie la condition 1 et l'une des conditions 2 et 2′ suivantes :

(1) $\pi_A(n)/n \to 0$

(2) $\pi_A(n)/\pi_A(\lambda n)$ *converge pour tout* $\lambda > 0$ *et la limite est différente de 1 pour* $\lambda \neq 1$

(2′) $(a_{n+1} - a_n)/a_n \to 0$

Question 8. *En utilisant le critère de la question 6, montrer que les ensembles suivants ne sont pas rationnels :*

- $A_k = \{m^k | m \in \mathbb{N}^*\}$ *($k \geq 2$) ;*
- $\mathcal{P}$ *l'ensemble des nombres premiers.*
  Indication : on pourra utiliser l'équivalence bien connue $\pi_{\mathcal{P}}(n) \sim n/log(n)$.