

TD12. Mots infinis, théorème de Büchi et limites de langages

Dans tout le sujet, A désigne l'alphabet $\{a, b\}$ et Σ désigne un alphabet fini quelconque. On rappelle que pour un automate \mathcal{A} fini (déterministe ou non) $L_+(\mathcal{A})$ est le langage rationnel reconnu par l'automate et $L_\omega(\mathcal{A})$ est le langage de mots infinis reconnu par l'automate (les mots tels qu'un chemin passe une infinité de fois par un état final).

Exercice 1. Théorème de Büchi

1. Donner un automate \mathcal{A} tel que $L_\omega(\mathcal{A}) = A^+b^\omega$.
2. Donner un automate déterministe \mathcal{A} tel que

$$L_\omega(\mathcal{A}) = \{u \in A^\omega \mid |u|_a = |u|_b = \infty\}$$

3. Soit $L \in \text{Rec}(\Sigma^+)$ un langage rationnel de mots finis. Construire un automate qui reconnaît le langage de mots infinis L^ω .
4. Montrer que tout langage ω -rationnel peut être reconnu par un automate de Büchi.
5. Réciproquement, montrer que tout langage de mots infinis reconnu par automate de Büchi est ω -rationnel.

Exercice 2. Langages déterministes

1. Étant donnés deux automates déterministes \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 , construire des automates déterministes qui reconnaissent les langages $L_\omega(\mathcal{A}_1) \cup L_\omega(\mathcal{A}_2)$ et $L_\omega(\mathcal{A}_1) \cap L_\omega(\mathcal{A}_2)$.
Si $L \subseteq \Sigma^+$ est un langage de mots finis, on appelle limite du langage L le langage de mots infinis

$$\vec{L} = \{u \in \Sigma^\omega \mid u(1)u(2)\dots u(n) \in L \text{ pour une infinité d'entiers } n\}$$

2. Montrer que $\overrightarrow{A^+b}$ est l'ensemble des mots $u \in A^\omega$ tels que $|u|_b = \infty$.
3. Calculer $\overrightarrow{A^+}$ et $\overrightarrow{a^+b}$.
4. Montrer que le langage A^+a^ω n'est pas limite d'un langage de mots finis.
5. L'ensemble $\{\vec{L} \mid L \subseteq \Sigma^+\}$ des limites des langages de mots finis sur Σ est-il clos par union ? par complémentaire ?
6. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un automate déterministe. Montrer que $L_\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L_+(\mathcal{A})}$. Cette égalité est-elle toujours vérifiée si \mathcal{A} n'est pas déterministe ?
7. Montrer que l'ensemble $\{\vec{L} \mid L \in \text{Rec}(\Sigma^+)\}$ des limites de langages rationnels sur Σ est clos par union et intersection mais pas par complémentaire.
8. L'ensemble $\{\vec{L} \mid L \subseteq \Sigma^+\}$ des limites de langages de mots finis sur Σ est-il clos par intersection ?