TD1. Aux grands mots les grands moyens

Exercice 1 *Elu par cette crapule, Esope reste et se repose.*

On appelle image miroir d'un mot u sur un alphabet Σ (ou simplement miroir de u) le mot $\bar{u}$ ainsi défini :
- si $u = \varepsilon$ alors $\overline{u} = \varepsilon$,
- si $u = a_1 a_2 \dots n_n$ alors $\overline{u} = a_n a_{n-1} \dots a_1$.

Soit L l'ensemble des mots u sur Σ tels que $u = \overline{u}$ (appelés *palindromes*). On suppose que Σ contient au moins deux lettres (parce que sinon c'est pas très drôle).

1. Soient $u, u_1, u_2 \dots, u_n$ des mots sur Σ tels que u soit distinct de tous les u_i. Démontrer qu'il existe un mot v sur Σ tel que $uv \in L$ et $u_i v \notin L$ pour tout i. (On pourra considérer $v = a^m b a^m \overline{u}$ où a et b sont des lettres de Σ et m est un entier assez grand)

2. Existe-t-il toujours un tel mot v si la famille (u_i) est infinie ? (étudier par exemple le cas où les u_i sont tous les mots de Σ^* différents de u).

Exercice 2

On appelle bord d'un mot u sur un alphabet Σ tout mot v non vide qui est à la fois préfixe propre et suffixe propre de u.

1. Prouver que si Σ est un alphabet contenant au moins deux lettres, pour tout mot u non vide sur Σ, il existe un mot v sur Σ tel que uv n'a pas de bord.

Exercice 3 *Codes*

On appelle code sur un alphabet A tout langage X sur A tel que $x_1 x_2 \dots x_p = y_1 y_2 \dots y_q$ et $x_i \in X$ pour tout i et $y_j \in X$ pour tout j entraînent $p = q$ et $x_i = y_i$ pour tout i. Dire que X est un code revient donc à dire que tout élément de X^* se factorise de manière unique sur X.

1. Les langages suivants sont-ils des codes ?
- $X_1 = \{ab, baa, abba, aabaa\}$
- $X_2 = \{b, ab, baa, abaa, aaaa\}$
- $X_3 = \{aa, ab, aab, bba\}$
- $X_4 = \{a, ba, bba, baab\}$

2. Soit u un mot de A^*, montrer que la partie $\{u\}$ est un code si et seulement si $u \neq \varepsilon$.

3. Soient u et v deux mots distincts de A^*, montrer que la partie $\{u, v\}$ est un code si et seulement si u et v ne commutent pas.

4. Soit X une partie de A^* ne contenant pas ε et telle qu'aucun mot de X ne soit préfixe propre d'un autre mot de X. Montrer que X est un code (un tel code est appelé code préfixe).

Exercice 4 *Préfixes et centres*

Soit L un langage sur un alphabet A. On désigne par $FG(L)$ l'ensemble des facteurs gauches (ou préfixes) de L.

1. Trouver l'ensemble des facteurs gauches de chacun des langages suivants sur l'alphabet $A = \{a, b\}$:
- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- $L_2 = \{a^n b^m \mid 0 \leq n \leq m\}$
- $L_3 = \{a^n b^m \mid 0 \leq m \leq n\}$
- $L_4 = \{u \in A^* \mid |u|_a = |u|_b\}$

2. On appelle centre de L, et on note $c(L)$, l'ensemble des mots u de A^* tels que $\mathrm{Card}(uA^* \cap L)$ soit infini. Calculer $c(L)$ pour les quatre langages ci-dessus.

3. Que valent $c(L \cup L')$, $c(LL')$ et $c(L^+)$ en fonction de $c(L)$ et $c(L')$?

Exercice 5
Résiduels
Soit L un langage sur un alphabet A, et soit u un mot sur A. On appelle résiduel à gauche de L par rapport à u, et on note $u^{-1}L$ l'ensemble des mots v sur A tels que $uv \in L$.

1. Calculer le résiduel de L par rapport à tout mot u sur $A = \{a, b\}$ dans les exemples suivants :
- $L = a^* b^*$
- $L' = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

2. Si x est une lettre de A, que valent $x^{-1}(L \cup L')$, $x^{-1}(LL')$ et $x^{-1}L^*$?