TD4. The Very Best of the Partiel 2004

Exercice 1 *Prédiction des mots univers*

Dans tout cet exercice, on considèrera l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Définition 1 (automate de prédiction). *Un* automate de prédiction $\mathcal{A}$ *(sur l'alphabet Σ) est un quintuplet $(Q, q_0, Q_a, Q_b, \delta)$ où*
- *Q est un ensemble fini (les états de $\mathcal{A}$)*
- *$q_0 \in Q$ est l'état initial*
- *$Q_a \subseteq Q$*
- *$Q_b \subseteq Q$*
- *$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est la fonction de transition de A*

(on peut voir ces automates comme des automates finis déterministes ayant deux ensembles d'états terminaux)

Définition 2 (mots infinis). *Un* mot infini *w sur Σ est une suite $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans Σ.*

Définition 3 (parcours d'un mot). *Soit $\mathcal{A}$ un automate de prédiction et w un mot infini sur Σ. Le* parcours de w sur $\mathcal{A}$ *est défini comme étant la suite $(q(w)_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans Q avec*

$$\begin{aligned} & q(w)_0 = q_0 \\ \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad & q(w)_{n+1} = \delta(q(w)_n, w_n) \end{aligned}$$

Définition 4 (prédiction). *Soit w un mot infini sur Σ et $\mathcal{A}$ un automate de prédiction. On dira que l'automate $\mathcal{A}$* prédit *le mot infini w si le parcours de w sur $\mathcal{A}$ passe un nombre infini de fois par des états de $Q_a \cup Q_b$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} q(w)_n \in Q_a \quad &\Rightarrow \quad w_n = a \quad \textit{et} \\ q(w)_n \in Q_b \quad &\Rightarrow \quad w_n = b \end{aligned}$$

De plus, un mot infini sur Σ est dit prédictible *s'il existe un automate de prédiction $\mathcal{A}$ qui prédise w.*

Intuitivement, la prédiction d'un mot w par l'automate $\mathcal{A}$ signifie que lorsque l'on atteint un état de Q_a (en lisant un préfixe de w) la prochaine lettre de w que l'on va lire sera un a (et symétriquement pour b).

Définition 5 (mots univers). *Un mot infini w sur Σ est dit* univers *si tout mot fini x de Σ^* est un facteur de w.*

On se propose de montrer le résultat suivant

Proposition 1. *Un mot infini w est* prédictible *si et seulement si il n'est pas* univers.

1. Montrer que dans un mot univers w, tout mot fini $x \in \Sigma^*$ apparaît un nombre infini de fois comme facteur de w et que tous ses suffixes (les suites $(w_i)_{i\geq k}$) sont également univers.

2. Montrer que tout mot infini qui n'est pas univers est prédictible (on pourra considérer un plus court mot de Σ^* qui n'apparaît qu'un nombre fini de fois dans w).

On suppose maintenant que l'on a un mot w qui est prédit par un automate $\mathcal{A}$. On veut montrer que w n'est pas univers.

3. Montrer que l'on peut se ramener (quitte à considérer un suffixe de w et un sous-automate de $\mathcal{A}$) à une situation où le parcours de w sur $\mathcal{A}$ passe une infinité de fois par tous les états de $\mathcal{A}$.

On suppose que l'on est dans la situation décrite dans la question précédente.

4. Montrer qu'il existe un entier d tel que pour tout état q de $\mathcal{A}$, il existe un mot $x_q \in \Sigma^*$ de longueur d qui n'est jamais lu dans le parcours de w sur $\mathcal{A}$ à partir de q.

C'est-à-dire que pour tout i, si $q(w)_i = q$ alors le mot $w_i w_{i+1} \dots w_{i+d-1}$ est différent de x_q.

5. En déduire qu'il existe un entier K tel que pour tout $n \geq 1$, le nombre de facteurs distincts de longueur nd dans w est inférieur à $K(2^d - 1)^n$.

6. Conclure.

Exercice 2 *L'abominable Lex L. (contre Superman)*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet fini Σ quelconque. On munit Σ d'un ordre total et l'on considère l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}}$ sur Σ^*. On définit le langage

$$L_{\text{lex}} = \{w \in L \quad | \quad \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{\text{lex}} x\}$$

(Pour chaque longueur de mots dans L, on ne garde que le plus petit pour l'ordre lexicographique.) Montrer que L_{lex} est rationnel.

Exercice 3 *Divide and Conquer*

Soit L un langage rationnel infini. Montrer qu'il existe une famille infinie $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de langages rationnels infinis deux à deux disjoints telle que

$$L = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_i$$

Exercice 4 *Un truc de résiduels*

Existe-t-il un langage L (sur un alphabet fini quelconque) ayant un nombre infini de résiduels distincts et tel que tous ses résiduels soient rationnels ?