TD sur l'Algorithme FGLM pour le changement d'ordre d'une base de Gröbner

Frédéric Chyzak

Le 8 novembre 2006

Le temps de calcul d'une base de Gröbner dépend fortement de l'ordre monomial choisi. Expérimentalement, on observe qu'en général, l'ordre grevlex a de meilleures performances que l'ordre lex. Cependant, il est des applications qui imposent d'utiliser un ordre plutôt qu'un autre.

L'algorithme FGLM, du nom de ses inventeurs, Faugère, Gianni, Lazard et Mora, permet de convertir une base de Gröbner pour un ordre en une base de Gröbner pour un autre ordre dans le cas particulier des idéaux de dimension zéro, ce qui correspond à des systèmes polynomiaux n'admettant qu'un nombre fini de solutions. Dans ce cas, les escaliers correspondants aux bases de Gröbner rencontrent chacun des axes.

On s'intéresse à implanter une variante simplifiée de cet algorithme FGLM. On commencera par une version encore plus simplifiée, en ne calculant qu'un seul élément de la base pour l'ordre lex.

1. Écrire une fonction qui teste si un monôme m_1 est plus petit qu'un monôme m_2 pour l'ordre lexicographique.

2. Écrire une fonction qui, étant donnée une séquence de monômes, renvoie son plus petit élément m ainsi que la séquence modifiée après extraction de m et adjonction de chacun des produits $X_i m$.

3. Écrire une fonction qui énumère les monômes dans l'ordre croissant pour l'ordre lexicographique. On pourra maintenir une séquence de monômes restant à considérer initialement fixée à [1], et utiliser la question précédente.

4. Écrire une fonction qui teste si un monôme est dans les monômes de tête d'un idéal donné.

5. Écrire une fonction qui, étant donnée une base de Gröbner pour un idéal de dimension zéro, renvoie la séquence des monômes sous l'escalier.

6. Écrire une fonction qui extrait le coefficient d'un monôme donné dans un polynôme donné.

7. Écrire une fonction qui, prenant en entrée une séquence de polynômes en les monômes sous l'escalier calculé précédemment, détermine s'il existe une relation de dépendance linéaire entre ces polynômes.

8. Appliquer la question précédente à la suite des puissances d'une même indéterminée.

9. Modifier le programme précédent pour obtenir toute une base de Gröbner pour l'ordre lex, en itérant sur les monômes en croissant selon l'ordre lex au lieu des puissances d'une même indéterminée.

10. Tester le programme sur les systèmes CyclicRoots, le système d'ordre n étant donné par les polynômes symétriques $e_1, \ldots, e_{n-1}$ et $e_n - 1$. Ou sur la cubique twistée, d'équations $y = x^2$, $z = x^3$.