Techniques pour montrer la confluence

Confluence par confluence forte

Théorème : Si $\mathcal{R}$ est fortement confluent, alors $\mathcal{R}$ est confluent.

Confluence par équivalence

Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux systèmes de réécriture.

Théorème :

- Si $\rightarrow^*_{\mathcal{R}} = \rightarrow^*_{\mathcal{S}}$, alors $\mathcal{R}$ est confluent ssi $\mathcal{S}$ est confluent.
- Si $\rightarrow_{\mathcal{R}} \subseteq \rightarrow_{\mathcal{S}} \subseteq \rightarrow^*_{\mathcal{R}}$, alors $\rightarrow^*_{\mathcal{R}} = \rightarrow^*_{\mathcal{S}}$.
- Si $\rightarrow_{\mathcal{R}} \subseteq \rightarrow_{\mathcal{S}} \subseteq \rightarrow^*_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{S}$ est fortement confluent, alors $\mathcal{R}$ est confluent.

Confluence par commutation

Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux systèmes de réécriture.

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ commutent ssi pour tout s, t, u t.q. $s \to^*_{\mathcal{R}} t$ et $s \to^*_{\mathcal{S}} u$ il existe v t.q. $t \to^*_{\mathcal{S}} v$ et $u \to^*_{\mathcal{R}} v$.

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ commutent fortement ssi pour tout s, t, u t.q. $s \to_{\mathcal{R}} t$ et $s \to_{\mathcal{S}} u$ il existe v t.q. $t \to^*_{\mathcal{S}} v$ et $u \to^=_{\mathcal{R}} v$.

Théorème :

- Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ commutent fortement, alors ils commutent.
- Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont confluents et commutent, alors $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ est confluent.

Confluence par interprétation

Théorème : Soient R et T deux relations t.q. R est confluente et noetheriènne. S'il existe une relation S sur l'ensemble de R-formes normales t.q.

1. $\rightarrow_S^* \subseteq \rightarrow_{R \cup T}^*$ et
2. $a \rightarrow_T \; b$ implique $R(a) \rightarrow_S^* R(b)$

alors si S est confluente, $R \cup T$ est aussi confluente.

Confluence par paires critiques

Lemme : (Newmann) Soit $\mathcal{R}$ un système noetherien. $\mathcal{R}$ est localement confluent ssi $\mathcal{R}$ est confluent.

Comment montrer donc la confluence locale ?

Paires critiques

Soient $l \to r$ et $g \to d$ deux règles de réécriture telles que $Var(l) \cap Var(g) = \emptyset$.

Une paire critique entre $l \to r$ et $g \to d$ est une paire de la forme $\langle \sigma(r), \sigma(l)[\sigma(d)]_p \rangle$ où

- $p \in Pos(l)$ et $l|_p$ n'est pas une variable.
- σ est un unificateur principal de $l|_p$ et g.

Théorème : Soit $\mathcal{R}$ un système de réécriture. $\mathcal{R}$ est localement confluent ssi toute paire critique de $\mathcal{R}$ est joignable.

Théorème : Soit $\mathcal{R}$ un système de réécriture fini et fortement normalisable. Alors la confluence de $\mathcal{R}$ est décidable.

Les systèmes orthogonaux

Soit $\mathcal{R}$ un système de réécriture.

$\mathcal{R}$ est linéaire gauche ssi dans chaque partie gauche l d'une règle $l \to r \in \mathcal{R}$ toute variable apparaît au plus une fois.

$\mathcal{R}$ est orthogonal ssi il est linéaire gauche et il n'a pas de paires critiques.

Confluence pour les systèmes orthogonaux

Théorème : Si $\mathcal{R}$ est orthogonal, alors il est confluent.

Proof. À l'aide de la notion de réduction parallèle qui est donnée par les règles suivantes :

$$\frac{}{s \gg s} \quad \text{(Reflexivité)} \qquad \frac{l \to r \in \mathcal{R}}{\sigma(r) \gg \sigma(r)} \quad \text{(tête)}$$

$$\frac{s_1 \gg t_1 \ldots \ldots s_n \gg t_n}{f(s_1, \ldots, s_n) \gg f(t_1, \ldots, t_n)} \quad \text{(contexte)}$$

∎

Relaxation de l'orthogonalité

$$\begin{array}{rcl} por(true, x) & \rightarrow & true \\ por(x, true) & \rightarrow & true \end{array}$$

Ce système n'est pas orthogonal mais il a une paire critique triviale.

Un système $\mathcal{R}$ est parallèlement fermé ssi pour toute paire critique $\langle u, v \rangle$ de $\mathcal{R}$ on a $v \gg u$.

Théorème : Si $\mathcal{R}$ est linéaire à gauche et parallèlement fermé, alors il est confluent.