La logique équationnelle

Équations : syntax et sémantique

Une Σ-équation est une paire de termes noté $s \doteq t$.

Une Σ-algèbre $\mathcal{A}$ est un modèle d'une Σ-équation $s \doteq t$, noté $\mathcal{A} \models s \doteq t$, ssi pour toute $\mathcal{A}$-assignation σ on a $\widehat{\sigma}(s) = \widehat{\sigma}(t)$.

On dit aussi que $s \doteq t$ est valide pour $\mathcal{A}$.

Une Σ-algèbre $\mathcal{A}$ est un modèle d'un ensemble de Σ-équations $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{A} \models \mathcal{E}$, ssi $\mathcal{A}$ est un modèle de toute équation de $\mathcal{E}$.

On dit aussi que $\mathcal{E}$ est valide pour $\mathcal{A}$.

Consequénce sémantique

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de Σ-équations et $s \doteq t$ une Σ-équation quelconque.

L'équation $s \doteq t$ est une consequénce logique de l'ensemble $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E} \models s \doteq t$, ssi tout modèle de $\mathcal{E}$ est aussi un modèle de $s \doteq t$.

La théorie équationnelle engendrée par $\mathcal{E}$ est l'ensemble $\doteq_{\mathcal{E}} = \{(s,t) \in \mathcal{T}(\mathcal{X},\Sigma) \times \mathcal{T}(\mathcal{X},\Sigma) \mid \mathcal{E} \models s \doteq t\}$.

Exercice : Montrer que la relation $\doteq_{\mathcal{E}}$ est une congruence sur $\mathcal{T}(\mathcal{X},\Sigma)$.

Quelques problèmes intéressants

Soit $s \doteq t$ une Σ-équation et $\mathcal{E}$ un ensemble de Σ-équations.

Le problème du mot consiste à decider si $\mathcal{E} \models s \doteq t$.

Le problème d'unification sémantique consiste à trouver toutes les substitutions σ t.q. $\mathcal{E} \models \sigma(s) = \sigma(t)$.

Si $\mathcal{E} = \emptyset$ on parle du problème d'unification syntaxique, sinon du problème de $\mathcal{E}$-unification.

Le problème inductif consiste à décider si $\mathcal{T}(\Sigma)/_{\doteq_{\mathcal{E}}} \models s \doteq t$.

Règles syntaxiques pour le raisonnement équationnel

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t} \quad \textsf{(axiome)} \qquad \frac{}{s \doteq s} \quad \textsf{(réflexivité)}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s} \quad \textsf{(symétrie)} \qquad \frac{s \doteq t \quad t \doteq u}{s \doteq u} \quad \textsf{(transitivité)}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)} \quad \textsf{(substitution)} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p} \quad \textsf{(contexte)}$$

Dérivation

Une dérivation de l'équation $s \doteq t$ à partir d'un ensemble $\mathcal{E}$ est un arbre d'équations t.q.

- La racine est $s \doteq t$
- Si E est une feuille, alors $E \in \mathcal{E}$ ou E est une équation $s \doteq s$.
- Si $E_1, \ldots, E_n$ sont les fils de E, alors E est obtenue à partir de $E_1, \ldots, E_n$ par une règle syntaxique.

L'équation $s \doteq t$ est dérivée à partir de $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E} \vdash s \doteq t$, ssi il existe une dérivation de $s \doteq t$ à partir de $\mathcal{E}$.

La relation $\longleftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{\sigma(s) \longrightarrow_{\mathcal{E}} \sigma(t)} \quad (\forall \sigma) \qquad\qquad \frac{s \longrightarrow_{\mathcal{E}} t}{u[s]_p \longrightarrow_{\mathcal{E}} u[t]_p} \quad (\forall u \forall p)$$

$\longleftrightarrow_{\mathcal{E}}$ est la fermeture symétrique de $\longrightarrow_{\mathcal{E}}$

$\longleftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$ est la fermeture réflexive, symétrique et transitive de $\longrightarrow_{\mathcal{E}}$

À propos de $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$

Exercice : Montrer que $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$ est stable par substitution.

Exercice : Montrer que $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$ est une congruence sur $\mathcal{T}(\mathcal{X}, \Sigma)$.

Exercice : Montrer que $\mathcal{E} \vdash s \doteq t$ ssi $s \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}} t$.

Lemme de substitution (i)

Soit $\mathcal{A}$ une Σ-algèbre, σ une $\mathcal{A}$-assignation et θ une substitution. Alors pour tout terme $t \in \mathcal{T}(\mathcal{X}, \Sigma)$ on a

$$\sigma(\theta(t)) = \sigma'(t)$$

où $\sigma'(x) = \sigma(\theta(x))$ pour toute variable $x \in \mathcal{X}$.

Lemme de substitution (ii)

Considérons la Σ-algèbre $\mathcal{T}(\mathcal{X},\Sigma)^{\overset{*}{\leftrightarrow}_{\mathcal{E}}}$.

Soit σ une $\mathcal{T}(\mathcal{X},\Sigma)^{\overset{*}{\leftrightarrow}_{\mathcal{E}}}$-assignation et θ une substitution t.q $\sigma(x) = [\theta(x)]$ pour toute variable $x \in \mathcal{X}$. Alors pour tout terme $t \in \mathcal{T}(\mathcal{X},\Sigma)$ on a

$$\sigma(t) = [\theta(t)]$$

Le modèle $\mathcal{T}(\mathcal{X},\Sigma)^{\overset{*}{\leftrightarrow}_{\mathcal{E}}}$

Exercice : L'algèbre $\mathcal{T}(\mathcal{X},\Sigma)^{\overset{*}{\leftrightarrow}_{\mathcal{E}}}$ est un modèle de $\mathcal{E}$.

Théorème d'adéquation (Birkhoff 1933)

(Correction) Si $\mathcal{E} \vdash s \doteq t$, alors $\mathcal{E} \models s \doteq t$.

(Complétude) Si $\mathcal{E} \models s \doteq t$, alors $\mathcal{E} \vdash s \doteq t$.