Réécriture

Systèmes de réécriture et réécriture de termes

Une règle de réécriture est une paire $l \rightarrow r$ t.q. $Var(r) \subseteq Var(l)$ et l n'est pas une variable.

Un système de réécriture est un ensemble de règles de réécriture.

Un terme s se réécrit en t dans un système $\mathcal{R}$, noté $s \rightarrow_{\mathcal{R}} t$, ssi $\exists p \in Pos(t)$ t.q. $s \rightarrow_{\mathcal{R},p} t$ est dérivé à partir du système suivant :

$$\frac{l \rightarrow r \in \mathcal{R}}{\sigma(r) \rightarrow_{\mathcal{R},\Lambda} \sigma(r)} \quad (\text{tête}) \qquad\qquad \frac{l \rightarrow_{\mathcal{R},q} r \text{ et } p \neq \Lambda}{u[l]_p \rightarrow_{\mathcal{R},p.q} u[r]_p} \quad (\text{contexte})$$

On note $t \Rightarrow_{\mathcal{R}} u$ ssi la dernière règle est (contexte).

On note $t \mid\!\!\Rightarrow_{\mathcal{R}} u$ ssi la dernière règle est (tête).

Le terme s est un R-radical ssi il existe une substitution θ t.q. $s = \theta(l)$ pour $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$.

Notions de fermetures

- Un terme s se n-réécrit en t, noté $s \rightarrow^n_{\mathcal{R}} t$, ssi $\exists s_0 \ldots s_n$ t.q. $s = s_0 \rightarrow_{\mathcal{R}} s_1 \rightarrow_{\mathcal{R}} \ldots \rightarrow_{\mathcal{R}} s_n = t$.
- $s \rightarrow^+_{\mathcal{R}} t$ ssi $\exists n > 0$ t.q. $s \rightarrow^n_{\mathcal{R}} t$.
- $\rightarrow^=_{\mathcal{R}}$ est la fermeture réflexive.
- $\rightarrow^*_{\mathcal{R}}$ est la fermeture réflexive transitive de $\rightarrow_{\mathcal{R}}$.
- $\leftrightarrow_{\mathcal{R}}$ est la fermeture symétrique.
- $\leftrightarrow^*_{\mathcal{R}}$ est la fermeture réflexive, symétrique et transitive.
- Le terme t est réducible ssi il existe s t.q. $t \rightarrow_{\mathcal{R}} s$.
- Le terme t est en forme normale ssi il n'est pas réducible.
- Le terme s est une forme normale de t ssi $t \rightarrow^*_{\mathcal{R}} s$ et s est en forme normale.

Notions de confluence

Soit $\mathcal{R}$ un système de réécriture.

- Deux termes s et t sont joignables ssi il existe v vérifiant $s \to^*_{\mathcal{R}} v$ et $t \to^*_{\mathcal{R}} v$.
- $\mathcal{R}$ est Church-Rosser ssi pour tout s, t t.q. $s \leftrightarrow^*_{\mathcal{R}} t$, s et t sont joignables.
- $\mathcal{R}$ est confluent ssi pour tout s, t, u t.q. $s \to^*_{\mathcal{R}} t$ et $s \to^*_{\mathcal{R}} u$, t et u sont joignables.
- $\mathcal{R}$ est localement confluent ssi pour tout s, t, u t.q. $s \to_{\mathcal{R}} t$ et $s \to_{\mathcal{R}} u$, t et u sont joignables.
- $\mathcal{R}$ est fortement confluent ssi pour tout s, t, u t.q. $s \to_{\mathcal{R}} t$ et $s \to_{\mathcal{R}} u$, il existe v vérifiant $t \to^*_{\mathcal{R}} v$ et $u \to^{=}_{\mathcal{R}} v$.

Théorème : $\mathcal{R}$ est Church-Rosser ssi $\mathcal{R}$ est confluent.

Remarque : Si $\mathcal{R}$ est confluent, alors chaque élément possède au plus une forme normale.

Notions de terminaison

Soit $\mathcal{R}$ un système de réécriture.

- L'élément s est faiblement normalisable dans $\mathcal{R}$ ssi s possède au moins une forme normale.
- L'élément s est fortement normalisable dans $\mathcal{R}$ ssi il n'existe aucune suite infinie $s = s_0 \longrightarrow_{\mathcal{R}} s_1 \longrightarrow_{\mathcal{R}} \ldots$ ssi chaque séquence de réductions à partir de s est finie.
- Le système $\mathcal{R}$ est faiblement normalisable ssi tout élément est faiblement normalisable dans $\mathcal{R}$.
- Le système $\mathcal{R}$ termine ou est fortement normalisable ou noetherien ou bien fondé ssi tout élément est fortement normalisable dans $\mathcal{R}$.

Systèmes convergents

Définition : Le système $\mathcal{R}$ est convergent ssi il est confluent et fortement normalisable.

Théorème : Soit $\mathcal{R}$ un système convergent. Alors chaque élément possède une et une seule forme normale.

Algèbres de formes normales

Soit $\mathcal{R}$ un système de réécriture t.q. tout terme clos t possède une forme normal unique $nf_{\mathcal{R}}(t)$. Soit $\mathcal{FN}$ la Σ-algèbre définie par :

- Le domaine de $\mathcal{FN}$ est l'ensemble des termes clos en forme normale.
- Pour chaque $f \in \Sigma$,
  $f^{\mathcal{FN}}(nf_{\mathcal{R}}(u_1), \ldots, nf_{\mathcal{R}}(u_n)) = nf_{\mathcal{R}}(f(u_1, \ldots, u_n))$.

Théorème : L'algèbre de formes normales est une algèbre initiale, car elle est isomorphe à l'algèbre quotient sur l'algèbre syntaxique.