Stratégies de réduction

Stratégie

Définition : Une stratégie de réduction (un-pas ou multi-pas) pour un système de réécriture $\mathcal{R}$ est une fonction $I\!\!F : \mathcal{T}(\mathcal{X}, \Sigma) \mapsto \mathcal{T}(\mathcal{X}, \Sigma)$ t.q.

1. $I\!\!F(t) = t$ si t est en $\mathcal{R}$-forme normale.
2. $t \longrightarrow^{+} I\!\!F(t)$ sinon.

Dans la suite, on s'interessera uniquement aux stratégies pour les systèmes de réécriture orthogonaux.

Stratégie normalisante/co-finale

Une stratégie $\mathbb{F}$ est normalisante pour $\mathcal{R}$ ssi pour chaque terme t faiblement normalisable il n'existe pas de séquence infinie de la forme $t \rightarrow \mathbb{F}(t) \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{F}(t)) \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{F}(\mathbb{F}(t))) \rightarrow \ldots$

Une stratégie $\mathbb{F}$ est co-finale pour $\mathcal{R}$ si pour chaque terme t et pour chaque $\mathcal{R}$-réduction $t \rightarrow^*_{\mathcal{R}} t'$ il existe m t.q. $t' \rightarrow^*_{\mathcal{R}} \mathbb{F}^m(t)$.

Corollaire : Si $\mathbb{F}$ est une stratégie co-finale pour $\mathcal{R}$, alors elle est normalisante pour $\mathcal{R}$.

Classification

- Stratégies sans histoire
  - Innermost
  - Leftmost-innermost
  - Parallel-innermost
  - Leftmost-outermost (standard)
  - Parallel-outermost
  - Complète
- Stratégies avec histoire
  - Développement complet
  - Standard

Stratégies sans histoire

Stratégie(s) innermost

La stratégie innermost réécrit UN radical de l'ensemble de tous les radicaux les plus internes.

Exemple :

$$\mathcal{R}\left\{\begin{array}{lclclcl} f(a,x) & \rightarrow & x & \quad & f(b,x) & \rightarrow & b \\ g(a,x) & \rightarrow & a & \quad & g(b,x) & \rightarrow & x \end{array}\right.$$

$$f(f(a,f(a,b)),g(f(a,b),g(b,a)))$$

$$f(f(a,f(a,b)),g(f(a,b),g(b,a)))$$

$$f(f(a,f(a,b)),g(f(a,b),g(b,a)))$$

Stratégie leftmost-innermost

La stratégie leftmost-innermost réécrit le radical le plus à gauche de l'ensemble de tous les radicaux les plus internes.

Exemple :

$$\mathcal{R} \left\{ \begin{array}{lcl} f(a,x) & \rightarrow & x \\ f(b,x) & \rightarrow & b \\ g(a,x) & \rightarrow & a \\ g(b,x) & \rightarrow & x \end{array} \right.$$

$$f(f(a, f(a,b)), g(f(a,b), g(b,a)))$$

Stratégie parallel-innermost

La stratégie parallel-innermost réécrit simultanément tous les radicaux les plus internes.

$$f(f(a, f(a,b)), g(f(a,b), g(b,a)))$$

Remarque : Il y a une seule stratégie "leftmost-innermost" ou "parallel-innermost" mais plusieures stratégies "innermost".

Mais...

Théorème : Soit $\mathcal{R}$ un système orthogonal. Alors la stratégie innermost est normalisante pour $\mathcal{R}$ ssi $\mathcal{R}$ est fortement normalisable.

Stratégie leftmost-outermost

La stratégie leftmost-outermost réécrit le radical le plus à gauche de l'ensemble de tous les radicaux les plus externes.

$$f(f(a, f(a, b)), g(f(a, b), g(b, a)))$$

Stratégie complète

La stratégie complète réécrit simultanément tous les radicaux.

$$f(\underline{f(a, \underline{f(a, b)})}, g(\underline{f(a, b)}, \underline{g(b, a)}))$$

Est-ce que ces stratégies sont normalisantes ?

La stratégie leftmost-innermost n'est pas normalisante.

Exemple : Soit $\mathcal{R}$ le système suivant :

$$\mathcal{R} \begin{cases} f(x,b) & \rightarrow & d \\ a & \rightarrow & b \\ c & \rightarrow & c \end{cases}$$

$$f(\underline{c}, a) \rightarrow f(\underline{c}, a) \rightarrow \ldots$$

La stratégie parallel-innermost n'est pas normalisante.

Exemple : Soit $\mathcal{R}$ le système suivant :

$$\mathcal{R}\begin{cases} f(x,b) & \rightarrow & d \\ a & \rightarrow & b \\ c & \rightarrow & c \end{cases}$$

$$f(\underline{c},\underline{a}) \rightarrow f(\underline{c},b) \rightarrow \ldots$$

La stratégie leftmost-outermost n'est pas normalisante pour tous les systèmes orthogonaux.

Exemple :

$$\mathcal{R}\begin{cases} f(x,b) & \rightarrow & d \\ a & \rightarrow & b \\ c & \rightarrow & c \end{cases}$$

$$f(\underline{c},a) \rightarrow f(\underline{c},a) \rightarrow \dots$$

La stratégie leftmost-outermost est normalisante pour tous les systèmes orthogonaux et normaux à gauche.

Définition : Un terme est normal à gauche ssi tous les symboles de fonction précèdent les variables. Un systeme $\mathcal{R}$ est normal à gauche ssi pour chaque règle $l \to r \in \mathcal{R}$ le terme l est normal à gauche.

Exemple : Le terme $f(x, b)$ n'est pas normal à gauche, le terme $f(b, x)$ est normal à gauche.

La stratégie complète est normalisante pour les systèmes orthogonaux.

Stratégies avec histoire

Les descendants

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow \ h(x,x) \\ g(a) \rightarrow \ a \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccc} f(g(a)) & \rightarrow & h(g(a), g(a)) \\ & & \downarrow \\ & & h(a, g(a)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(a) & \rightarrow & h(a,a) \end{array}$$

Les accidents

$$\mathcal{R} : I(x) \longrightarrow x$$

$$I(I(x)) \longrightarrow I(x)$$

$$\mathcal{R} : a \longrightarrow a$$

$$f(a,a) \longrightarrow f(a,a)$$

L'étiquetage de termes

Il nous faut : la règle utilisée et la position à laquelle on effectue la réduction. On écrira :

$$f(g(a)) \to_{f(g(a))} f(a)$$

$$f(g(a)) \to_{f(g(a))} h(g(a), g(a)) \to_{h(g(a),g(a))} h(a, g(a))$$

$$I(I(x)) \to_{I(I(x))} I(x) \qquad I(I(x)) \to_{I(I(x))} I(x)$$

$$f(a, a) \to_{f(a,a)} f(a, a) \qquad f(a, a) \to_{f(a,a)} f(a, a)$$

À la recherche de la trace d'un radical

Soient s et s' deux radicaux dans u t.q. $u \equiv t[s] \rightarrow_{v[s']} t'$.

Qu'est-ce qui s'est passé avec s dans t' après réduction de s' ?

- Si s et s' sont disjoints : on retrouve s dans t'.
- Si s et s' sont les mêmes : le radical s est effacé.
- Si s' est un sous-terme strict de s : comme s' est un argument de s, on retrouve s mais avec un argument différent.
- Si s est un sous-terme strict de s' : le radical s apparait $n \geq 0$ fois dans t'.
- Tous les autres radicaux dans t' sont créés.

Exemple

$$\mathcal{R}\left\{\begin{array}{lll} a & \rightarrow_1 & b \\ b & \rightarrow_2 & c \\ c & \rightarrow_3 & d \\ f(x,y) & \rightarrow_4 & g(y,y) \\ g(x,h(y)) & \rightarrow_5 & h(y) \end{array}\right.$$

$$t : \underbrace{g(\underbrace{f(\underbrace{\ c\ }, h(\underbrace{\ a\ }))}, h(\underbrace{\ b\ }))} \rightarrow_4 \underbrace{g(\underbrace{g(h(\underbrace{\ a\ }), h(\underbrace{\ a\ }))}, h(\underbrace{\ b\ }))} : t'$$

Exemple (suite)

- Le radical a dans t est multiplié deux fois dans t'.
- Le radical b dans t apparaît une fois dans t'.
- Le radical c dans t est effacé dans t'.
- Le radical $f(c, h(a))$ dans t n'a pas de descendant dans t'.
- Le radical $g(f(c, h(a)), h(b))$ dans t possède un descendant $g(g(h(a), h(a)), h(b))$ dans t'.
- Le radical $g(h(a), h(a))$ dans t' est créé.

Descendants et résidus

Remarque : Soit $\mathcal{R}$ un système orthogonal. Les descendants d'un radical sont toujours des radicaux.

Définition : Un radical qui est descendant d'un radical est un résidu, sinon il est un radical créé.

Résidu d'un radical par une réduction

la position du radical s (abus de notation)

[…]adical quelconque de t.
L[…] par rapport à la réduction $\rho : t \rightarrow_{s'} t'$, noté $Res^*(s, \rho)$ est donné par :

- Si s et s' sont disjoints, alors $Res^*(s, \rho) = \{s\}$
- Si s et s' sont les mêmes, alors $Res^*(s, \rho) = \emptyset$.
- Si s est contenu dans s', alors $Res^*(s, \rho)$ contient n fois $(n \geq 0)$ s.
- Si s contient strictement s', alors $Res^*(s, \rho)$ contient s où chaque occurrence de s' a été remplacée par son réduit.

Résidu d'un ensemble de radicaux par une réduction

Soit $\rho : t \longrightarrow_{s'} t'$ et soit S un ensemble de radicaux de t. L'ensemble de résidus de S par rapport à la réduction $\rho : t \longrightarrow_{s'} t'$ est donné par

$$Res^*(S, \rho) = \bigcup_{s \in S} Res^*(s, \rho)$$

Résidu par une séquence de réductions

Définition : Soit $\rho : t \longrightarrow^* t'$ et soit s un radical quelconque de t. L'ensemble de résidus de s par rapport à la séquence de réduction $\rho : t \longrightarrow^* t'$, noté $Res(s, \rho)$ est donné par :

$$\begin{array}{lcl} Res(s, \epsilon) & = & \{s\} \\ Res(s, \rho) & = & Res^*(s, \rho), \text{ si } |\rho| = 1 \\ Res(s, \rho\delta) & = & Res(Res(s, \rho), \delta) \end{array}$$

où $Res(S, \rho)$ est donné par :

$$Res(S, \rho) = \bigcup_{s \in S} Res(s, \rho)$$

Développement

Un développement à partir d'un terme t est une séquence de réductions où aucun radical créé ne peut être contracté, c'est à dire, où l'on réduit uniquement les résidus de l'ensemble de radicaux de t. Formellement,

Définition : Soit S l'ensemble de tous les radicaux de t. Un développement à partir d'un terme t est une séquence de réductions :

$$\rho : t \rightarrow_{s_0} t_0 \rightarrow_{s_1} t_1 \rightarrow_{s_2} t_2 \ldots$$

tel que pour tout s_i on a $s_i \in Res(S, s_0 \ldots s_{i-1})$.

Développements complets

Définition : Soit S l'ensemble de tous les radicaux de t. Un développement $\rho : t \longrightarrow^* t'$ est complet ssi $Res(S, \rho) = \emptyset$.

Théorème : La stratégie développement complet est normalisante.

Réduction souslignée

On se donne une nouvelle signature

$$\underline{\Sigma} = \Sigma \cup \{\underline{f} \mid f \in \Sigma\}$$

On constuit un noveau système de réécriture

$$\underline{\mathcal{R}} = \{\underline{f}(l_1, \ldots, l_n) \to r \mid f(l_1, \ldots, l_n) \to r \in \mathcal{R}\}$$

Propriétés de la réduction soulignée

Propriétés de la réduction souslignée

1. Si $\mathcal{R}$ est orthogonal, $\underline{\mathcal{R}}$ est aussi orthogonal (et donc confluent).
2. $\underline{\mathcal{R}}$ est fortement normalisable.
3. Tout développement $\rho : t \longrightarrow^* t'$ se projete sur une séquence de $\underline{\mathcal{R}}$-réductions de la même longuer.

Corollaire : La stratégie développements complets est normalisante.