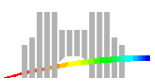
Génération de Code Parallèle

Paul Feautrier

ENS de Lyon
Paul.Feautrier@ens-lyon.fr

4 janvier 2005



Génération de code parallèle

- Paul Feautrier,
- basé sur des travaux de J. Fourier, C. Ancourt, F. Irigoin, A. Darte, JingLing Xue, T. Risset, P. Boulet, etc.

Plan

- Présentation du problème
- Parcours d'un polyèdre
- Parcours d'un Z-polyèdre
- Parcours d'une union de Z-polyèdres
- La méthode de Boulet et Feautrier

Présentation du problème

Un nid de boucle peut être représenté par un polyèdre :

```
for(i=0; i<n; i++)
 for(j=0; j<i; j++)
 S : c[i] += a[i][j]*b[j];
```

$$D_S = \{[i,j] \mid 0 \leq i < n, 0 \leq j < i\}$$

- Pour paralléliser, on applique une transformation qui regroupe autant de dépendances que possible sur la boucle extérieure.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T(D_S) = \{[y,x] \mid 0 \leq x < n, 0 \leq y < x\}$$

- Le problème est d'écrire un nid de boucle qui parcourt $T(D_S)$ dans l'ordre lexicographique. La première boucle sera séquentielle et la seconde parallèle.
- Pour le choix de T, voir l'exposé d'Alain Darte.

Classification

$T(D)$ n'est pas toujours un Z-polyèdre: celà dépend de T.

- Un polyèdre ; transformation unimodulaire.
  - Une transformation unimodulaire est caractérisée par une matrice de déterminant $+1$ ou -1.
  - T^{-1} est entière.
  - $T(D)$ est un Z-polyèdre.
- Transformation non unimodulaire : Z-polyèdres.
  - $T(D)$ est un polyèdre "à trous".
- Nid de boucle imparfait : union de Z-polyèdres.
  - Dans un nid de boucles imparfait, il y a autant de domaines d'itération et de transformations que d'instructions.
  - Il faut parcourir $T_1(D_1), \ldots T_n(D_n)$.
  - $T_i(D_i)$ est un Z-polyèdre.

Cas d'un seul polyèdre ; la méthode de Fourier-Motzkin

Un polyèdre est défini par un système d'inégalités:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &\geq a_{1,0}, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &\geq a_{2,0}, \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 &\geq a_{3,0}. \end{aligned}$$

dans le cas d'un polyèdre à deux variables et trois contraintes. On suppose que x_1 est le compteur de la boucle la plus interne.

- Si $a_{11} > 0$, on a la borne inférieure $x_1 \geq (a_{10} - a_{12}x_2)/a_{11}$.
- Si $a_{21} = 0$, on n'a aucune information sur x_1.
- Si $a_{31} < 0$ on a la borne supérieure $x_1 \leq (a_{30} - a_{32}x_2)/a_{31}$.

Dans le cas général:

$$\lceil \max_{a_{i1}>0}(a_{i0} - a_{i2}x_2 - \ldots)/a_{i1} \rceil \leq x_1 \leq \lfloor \min_{a_{i1}<0}(a_{i0} - a_{i2}x_2 - \ldots)/a_{i1} \rfloor.$$

- On élimine x_1 en écrivant:

$$(a_{i0} - a_{i2}x_2 - \ldots)/a_{i1} \leq (a_{j0} - a_{j2}x_2 - \ldots)/a_{j1}$$

  pour toute paire $a_{i1} > 0, a_{j1} < 0$
- On ajoute les contraintes correspondant à $a_{i1} = 0$ et on recommence pour x_2.

.

Complexité : $n(\frac{m}{2})^{2^n}$.
Le résultat n'est pas toujours le plus simple possible.

Exemple : l'inversion de boucle

$$D = \{[y, x] \mid 0 \leq x \leq n-1, 0 \leq y \leq x-1\}$$

On sélectionne les bornes pour x.

$$0 \leq x \leq n-1,$$

$$y+1 \leq x.$$

D'où les bornes :

$$\max(0, y+1) \leq x \leq n-1$$

On élimine x :

$$0 \leq n - 1,$$

$$0 \leq y \leq n - 2.$$

D'où les bornes :

$$0 \leq y \leq n - 2.$$

ce qui permet de simplifier la borne inférieure de x. D'où le programme :

```
for(y=0 ; y<n-1 ; y++)
    for(x =y+1 ; x<n ; x++)
        . . .
```

Référence C. Ancourt, F. Irigoin : *Scanning Polyhedra with DO loops* , PPoPP, 1991.

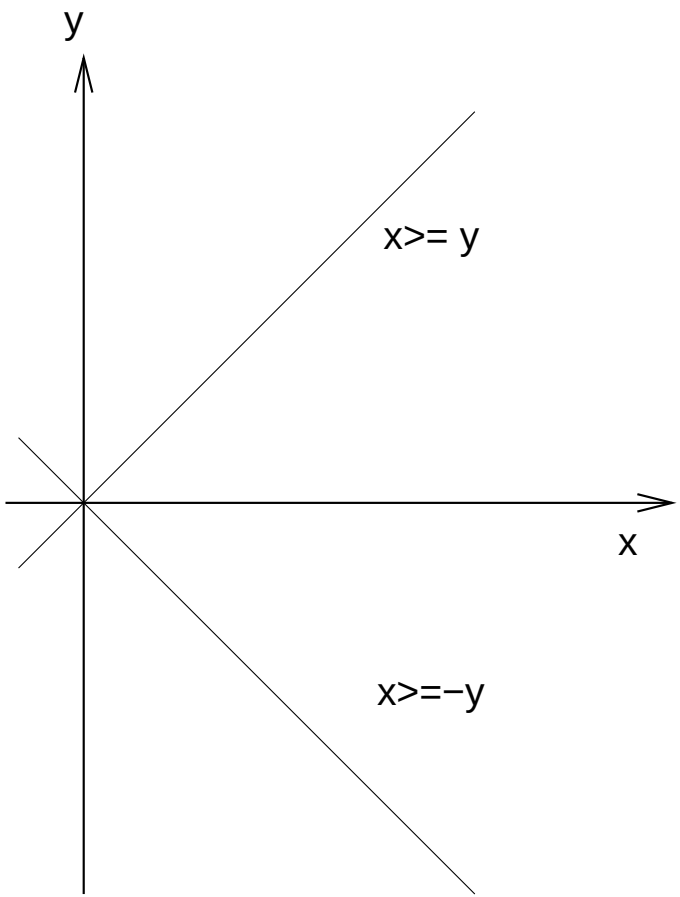
Programmation linéaire paramétrique

Trouver le minimum lexicographique d'un polyèdre dépendant de paramètres :

$$Q(y) = \min_{\ll}\{x \mid Ax + By + c \geq 0\} \tag{1}$$

- x et y sont des vecteurs, A et B des matrices, c un vecteur.
- La position du minimum dépend de la valeur du paramètre.
- Découpages successifs du domaine des paramètres. La solution se présente comme une conditionnelle.

Exemple



$$\text{If } y \geq 0 \text{ Then } x \text{ Else } -x$$

Références P. Feautrier, *Parametric Integer Programming* RAIRO-RO, 1988.

Application au parcours d'un polyèdre

Pour chaque niveau de boucle, on détermine un minimum et un maximum, les compte-tours des boucles englobantes étant considérés comme des paramètres.

$$D_0(n) = \{[y,x] \mid 0 \leq x \leq n-1, 0 \leq y \leq x-1\}$$

$$\min_{\ll} D_0(n) = \textbf{if } n \geq 2 \textbf{ then } [0,0] \textbf{ else } \bot.$$

$$\max_{\ll} D_0(n) = \textbf{if } n \geq 2 \textbf{ then } [n-2, n-1] \textbf{ else } \bot.$$

$$\min_{\ll} D_1(y,n) = \textbf{if } 0 \leq y \leq n-2 \textbf{ then } [y+1] \textbf{ else } \bot.$$

$$\max_{\ll} D_1(y,n) = \textbf{if } 0 \leq y \leq n-2 \textbf{ then } [n-1] \textbf{ else } \bot.$$

- On retrouve la même boucle que ci-dessus.
- La condition $n \geq 2$ n'a pas besoin d'être explicitée.
- Il en est de même pour la condition $0 \leq y \leq n-2$. On peut éliminer celle-ci directement en utilisant le système de *contexte* de PIP. Les simplifications deviennent automatiques.

Parcours d'un Z-polyèdre

Il y a deux façons de définir un Z-polyèdre :

- $$P = \{y \mid \exists x, y = Tx, Ax + b \geq 0, x, y \in \mathbb{N}\}$$
- $$Q = \{y \mid \exists x, y = Tx, Ay + b \geq 0, x, y \in \mathbb{N}\}$$
- La première définition (les LBL de Lothar Thiele) est plus générale et correspond mieux aux problèmes rencontrés en génération de code.
- L'utilisation de la deuxième forme n'apporte pas de simplification significatives.

Forme Normale de Hermite

Toute matrice non singulière à coefficients entiers T peut être mise sous forme normale de Hermite :

$$T = HU,$$

où U est unimodulaire et où H :

- Est triangulaire inférieure à éléments positifs,
- Les éléments diagonaux dominent les autres éléments.

Méthode On applique à T une succession de transformations élémentaires (changement de signe, échange de lignes, torsion) jusqu'à obtenir la forme désirée. Toutes ces transformations sont unimodulaires. On calcule U en appliquant à la matrice unité les transformations inverses.

Références Newman : *Integral Matrices*
Alain Darte : Thèse, Lyon, 1993.

Parcours d'un Z-polyèdre

- On calcule H et U.
- $U(D)$ est un polyèdre parce que U est unimodulaire. On pose :

$$x \in D,\ y = Tx = HUx,\ z = Ux,\ y = Hz.$$

- H respecte l'ordre lexicographique parce qu'elle est triangulaire inférieure et que ses coefficients diagonaux sont positifs.
- On écrit la boucle qui fait parcourir à z le polyèdre $U(D)$ par l'une des méthodes précédentes.
- On calcule la transformée $y = Hz$,
- Ou bien on applique H directement aux bornes des boucles. Les éléments diagonaux de H donnent les pas des boucles.

Soit le programme :

```
for(i=0; i<n; i++)
    for(j=0; j<m j++)
       S;
```

à qui on doit appliquer la transformation

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La décomposition de Hermite de T est :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le domaine $U(D)$ est :

$$U(D) = \{[z_1, z_2] \mid 0 \leq z_1 + z_2 \leq n-1, 0 \leq z_2 \leq m-1\}$$

La méthode de Fourier donne la boucle :

```
for(z1=1-m; z1 < n; z1++)
    for(z2=max(0,-z1); z2 < min(m, n-z1); z1++) {
        y1 = z1;
        y2 = z1 + 3 * z2;

    }
```

que l'on peut également écrire :

```
for(y1 = 1-m; y1<n; y1++)
  for(y2=y1+3*max(0,-y1); y2 < y1 + 3*min(m, n-y1); y2 += 3)
```

Parcours d'une union de Z-polyèdres

Le problème est très difficile dans le cas général :

- S'arranger pour que les images aient le même nombre de dimensions.
- Construire plus ou moins approximativement l'union des images (coque convexe, plus petit parallélipipéde rectangle englobant.
- Ecrire le code de parcours de ce parallélipipède.
- Le corps de boucle est composé de toutes les instructions du programme original avec une garde pour qu'elles ne soient exécutées que là où il faut.

$$\begin{aligned} \text{For} \quad y \quad & \in T_1(D_1) \cup T_2(D_2) \cup \ldots \\ & \textbf{if } y \in T_1(D_1) \textbf{ then } S_1; \\ & \textbf{if } y \in T_2(D_2) \textbf{ then } S_2; \end{aligned}$$

Inconvénients et améliorations

- Le calcul des *gardes* : $y \in T_k(D_k)$ est une perte de temps. Il peut suffire à annuler l'avantage obtenu par une optimisation ou une parallélisation.
- On peut tenter d'éviter ces gardes en les remontant dans le nid de boucle:

```
for(i=0; y<2*n; i++)
  for(j=0; j<n; j++){
    if(i<n) S1;
    else S2;
}
```

```
for(i=0; y<2*n; i++)
  if(i<n}
    for(j=0; j<n; j++)
      S1;
  else
    for(j=0; j<n; j++)
      S2;
}
```

On peut maintenant couper la boucle externe en deux:

```
for(i=0; y<n; i++)
  for(j=0; j<n; j++)
      S1;
for(i=n; i<2*n; i++)
  for(j=0; j<n; j++)
      S2;
```

La méthode est difficile à formaliser.

La Méthode de Quilleré-Bastoul

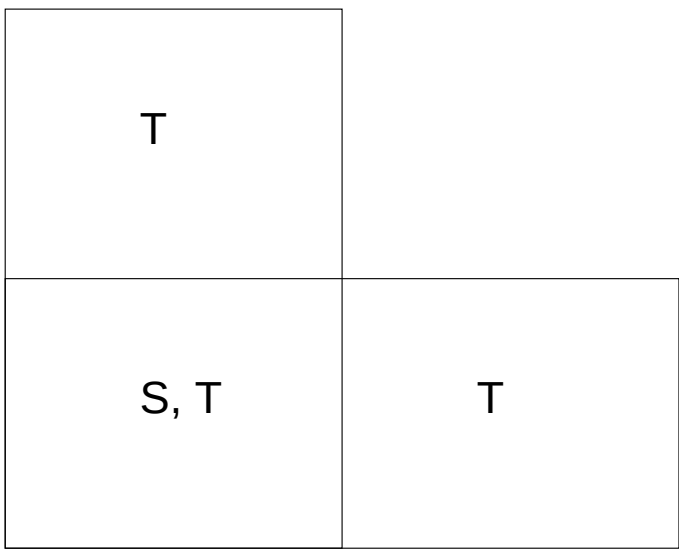
Objectif: minimiser le nombre de gardes.

Synopsis de l'algorithme:

- Au lieu d'appliquer la transformation T, on la considère comme un renommage. Au lieu de parcourir $T(D)$, on parcourt $\{\langle t, i\rangle \mid t = T(i), i \in D\}$. Si T est inversible, les boucles sur i ne font qu'un tour.
- On projette l'ensemble des polyèdres à parcourir sur la première dimension.
- On calcule toutes les intersections deux à deux jusqu'à obtenir une union de polyèdres (segments) disjoints. Dans chaque polyèdre, les instructions à exécuter sont fixées.
- On trie les segments dans l'ordre croissant.
- On connait tout ce qu'il faut pour écrire la séquence de boucles qui parcourt la première dimension.
- On recommence successivement pour chaque polyèdre et pour la dimension suivante.

Exemple

Soit une instruction S, dont le domaine est $\{0 \leq i \leq 100, 0 \leq j \leq 10 \mid \}$ et une instruction T, dont le domaine est $\{0 \leq i \leq 50, 0 \leq j \leq 20 \mid \}$.



- Les deux projections sont $[0, 50]$ et $[0, 100]$.
- Les segments disjoints sont $[0, 50]$ et $[51, 100]$.
- D'où les boucles:

```
for(i=0; i<=50; i++)
    ...
for(i=51; i<=100; i++)
    ...
```

Exemple, suite

- Au niveau suivant, le deuxième intervalle conduit à une seule boucle.
- Le premier intervalle conduit à deux boucles, correspondant aux deux intervalles $[0, 10]$ et $[11, 20]$.

```
for(i=0; i<=50; i++){
  for(j=0; j<=10; j++){
    S;
    T;
  }
  for(j=11; j<=20; j++)
    T;
}
for(i=51; i<=100; i++)
  for(j=0; j<=10; j++)
    S;
```

Noter:

- l'absence de gardes,
- la duplication du code.

Gardes Résiduelles

La projection est une opération rationnelle. Tous les points entiers de la projection d'un polyèdre ne sont pas projection de points entiers du polyèdre.
Il faut donc construire des gardes résiduelles pour éliminer les fausses projections.

Exemple

Deux polyèdres:

$$\begin{pmatrix} t = 2i \\ 0 \leq i \leq n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t = 2i+1 \\ 0 \leq i \leq n \end{pmatrix}$$

- On projette sur t et on découpe. On trouve les deux points $(0,0)$ et $(2n+1, n)$ et le segment $[1, 2n]$.
- Dans le segment, pour le premier polyèdre, on a $t/2 \leq i \leq t/2$. Mais $t/2$ n'est entier que si $t \mod 2 = 0$. Il faut une garde.
- Pour le deuxième polyèdre, la contrainte est $t \mod 2 = 1$.

```
S1(i<-0);
for(t=1; t<2*n; t++){
  if(t%2 ==1) S2(i<- (t-1)/2);
  if(t%2 ==0) S1(i<- t/2);
  }
S2(i<-n);
```

Cas particulier

Si les deux tests sont les mêmes, on peut les éliminer et les remplacer par un *pas*.

```
for(t=0; t<2*n; t+=2){
  S1(i<-t/2);
  S2(i<-t/2);
  }
```

Modifier l'ordonnancement

Mais il est plus efficace d'agir sur l'ordonnancement.

Par exemple, il vaut mieux prendre $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ que $2i$ et $2i+1$: on trouve directement le meilleur code possible.

Et le parallélisme ?

Comment retrouver le parallélisme dans le résultat de l'algorithme Quilleré-Bastoul ?

Règle Le parallélisme se déduit des itérateurs de boucles.

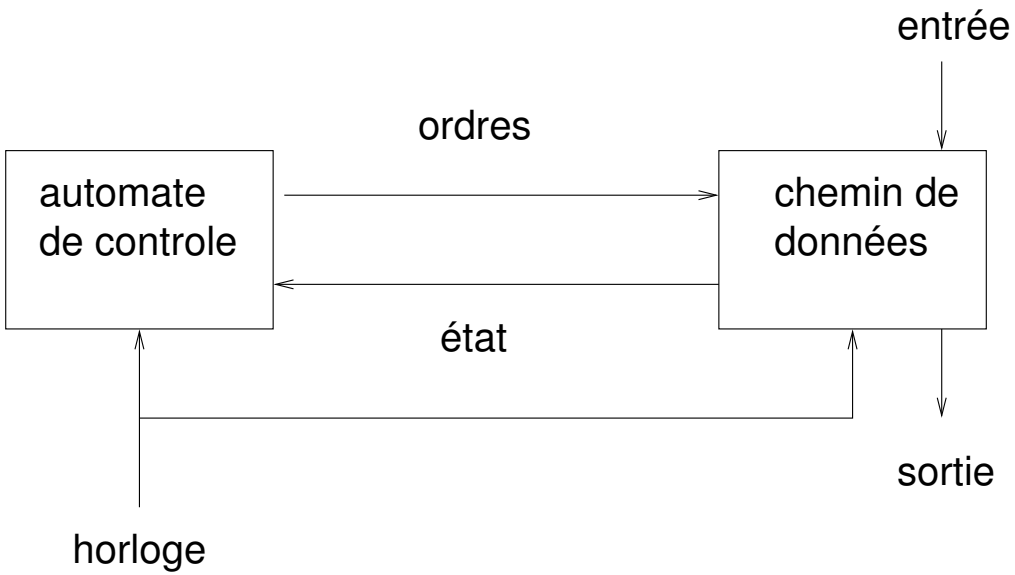
- Les boucles qui portent sur une variable d'ordonnancement sont séquentielles.
- Les boucles qui portent sur une variable de placement (ou allocation) sont parallèles.
- Les boucles qui portent sur les variables originale du programme, si elles subsistent, sont parallèles.

Difficultés L'implémenation standard de l'algorithme change les noms des comptes-tours.
Certaines boucles disparaissent.

Aperçu sur la synthèse de haut niveau

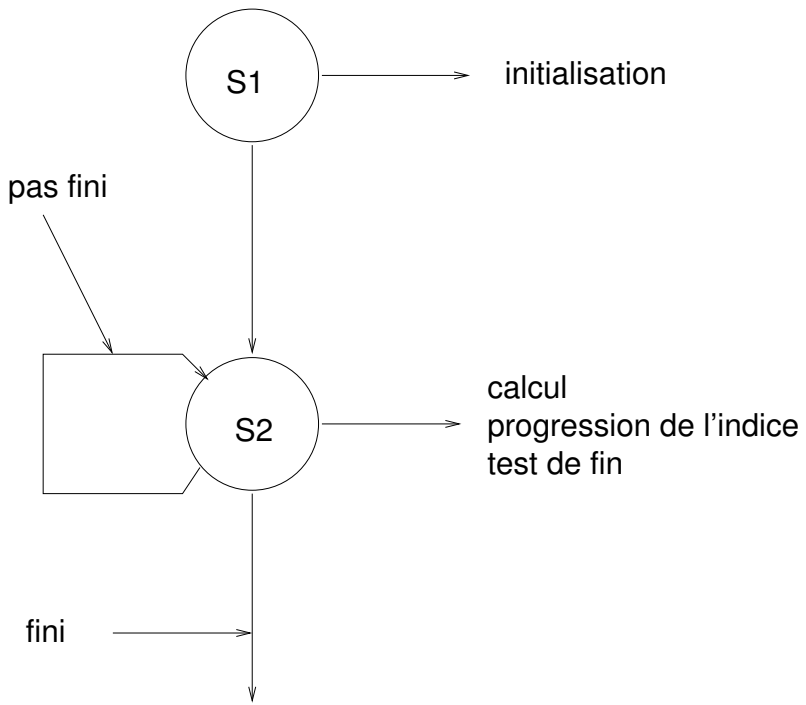
- A partir d'une description sous forme d'un programme en langage de haut niveau (e.g., C), déduire la structure d'un circuit VLSI (ASIC ou FPGA).
- Plus précisémment, écrire la spécification en langage synthétisable (VHDL ou Verilog) du circuit à réaliser.
- Problème de parallélisation automatique : le matériel est paralléle alors que C est séquentiel.
- Voir le cours de Arnaud Tisserand.
- Pour simplifier le travail de synthèse, on impose *a priori* la structure du circuit.

Structure d'un circuit VLSI



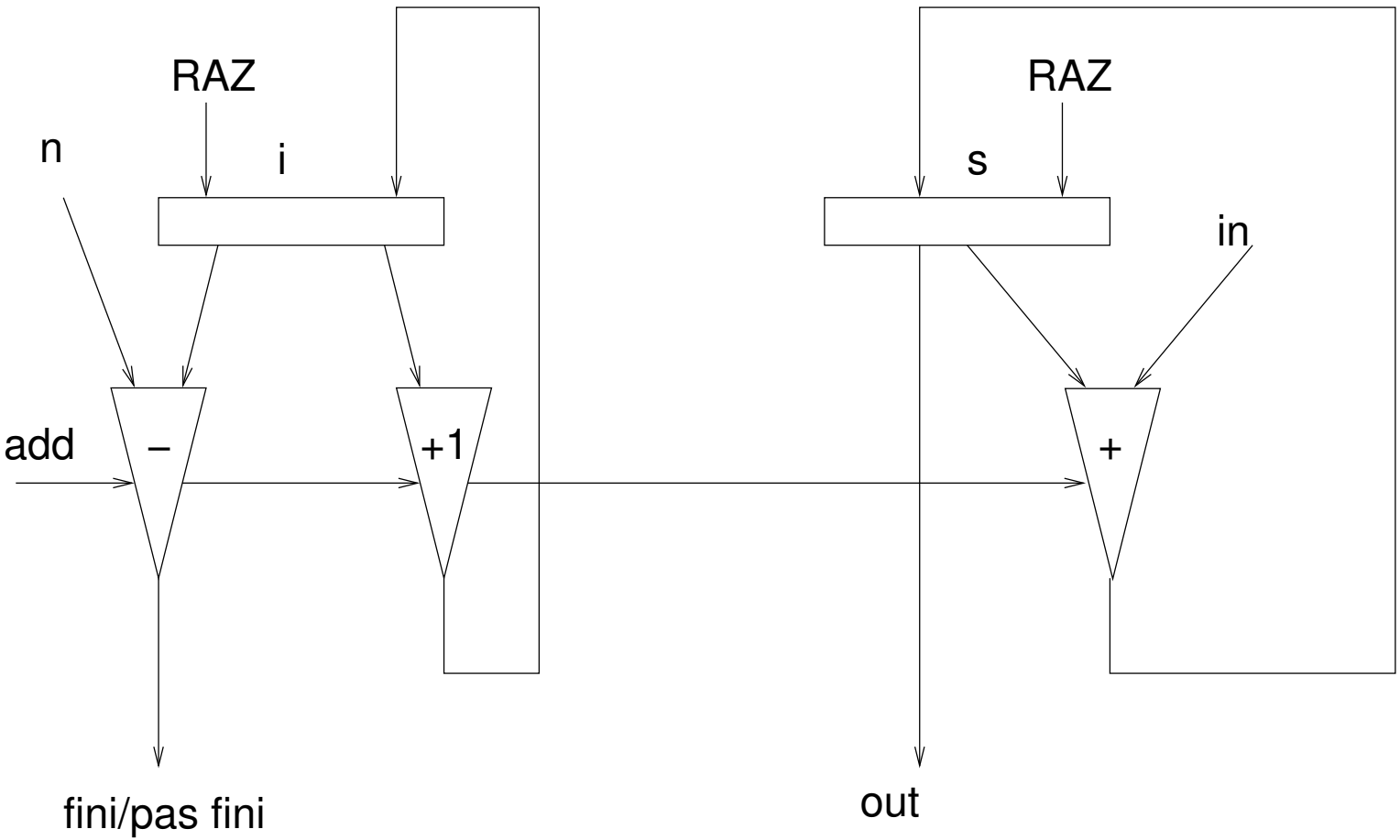
- Automate de contrôle = machine d'états finis qui change d'état à chaque top d'horloge.
- Chemin de données = ensemble des moyens de calcul (opérateurs, registres, connectique). Les registres peuvent enregistrer une nouvelle donnée à chaque top d'horloge.

Automate de contrôle



- L'automate de contrôle envoie des ordres au chemin de données (position des multiplexeurs, choix des opérations, registres).
- Le chemin de données envoie des informations d'état (e.g. le résultat d'une comparaison) à l'automate de contrôle, ce qui influence le choix de l'état suivant.

Chemin de données



Notations

Pour simplifier, on utilise une notation C (plutôt que VHDL ou Verilog) pour représenter l'automate de contrôle.

```
enum {S1, S2, S3} etat, suivant;

etat = S1;

while(1){
  switch (etat) {
  case S1 : ...
    break;
  case S2 : ...
    break;
  case S3 : ...
  }
  etat = suivant;
}
```

- Le cycle d'horloge est représenté par la boucle `while`.
- Les états de l'automate sont codés à l'aide d'une enumération.

A l'intérieur d'un état

- Génération des ordres pour le chemin de données.
- Calcul de l'état suivant.
- Attention, dans le matériel, toutes ces opérations s'effectuent en parallèle à l'aide d'un circuit *combinatoire*.
- En gros, il ne doit pas y avoir de dépendances à l'intérieur d'un état.

Méthodologie

- On se donne un programme et son ordonnancement.
- On élabore un automate provisoire que l'on raffine ensuite.
- Un état par instruction du programme original.
- Un registre par compte-tour d'une boucle englobante.
- Pour chaque état, on calcule quels sont les états qui peuvent le suivre dans l'exécution parallèle, en fonction des valeurs des compte-tours.
- Chaque successeur possible représente une transition de l'automate de contrôle.
- Raffinement : regrouper plusieurs états ou éclater un état (e.g. accès à la mémoire).

Calcul des transitions

- A partir de l'ordonnancement, on définit un ordre total, par exemple:

$$\begin{aligned} u \ll v \quad &\equiv \quad \theta(u) = \theta(v) \ \ \& \ \ u \,\text{avant}\, v \\ &\vee \quad \theta(u) < \theta(v). \end{aligned}$$

- On définit deux fonctions :

$$\begin{aligned} \text{first} \quad &= \quad \min_{\ll} E, \\ \text{next}(u) \quad &= \quad \min_{\ll} \{v \mid u \ll v\}. \end{aligned}$$

- first donne l'état initial de l'automate.
- next donne les transitions.

Calcul de la fonction `next`

- Le calcul de next est presque un problème de programmation linéaire en nombres entiers paramétrique. Les paramètres sont le vecteur d'itération de u.
- L'ordre $\ll$ est un ordre lexicographique, ce qui ne pose pas de problème pour minimiser.
- Par contre, le domaine n'est pas un polyèdre, mais une union disjointe de polyèdres.
- Il y a donc deux séparations :
  1. Suivant les instructions,
  2. Suivant les profondeurs.
- On obtient autant de candidats qu'il y a de polyèdres, et il faut calculer le plus petit.

Règles de réécriture, I

- Un candidat est une expression conditionelle :

$$q ::= a | \textbf{ if } p \textbf{ then } q_1 \textbf{ else } q_2 | \bot.$$

où a, b sont des vecteurs linéaires par rapport aux paramètres, p est un prédicat linéaire, et $\bot$ indique que le polyèdre correspondant est vide.

- On doit calculer des expressions de la forme $\min_{\ll}(q, q')$.
- La fonction min est symmétrique.

Règles de réécriture, II

- On a les propriété :

$$\begin{aligned} \min(\bot, q) &= q, \\ \min(\textbf{ if } p \textbf{ then } q_1 \textbf{ else } q_2, q') &= \textbf{ if } p \textbf{ then } \min(q_1, q') \\ &\quad \textbf{ else } \min(q_2, q'), \\ \textbf{if } p \textbf{ then } q \textbf{ else } q &= q. \end{aligned}$$

- On peut démontrer que ces règles de réécriture se terminent toujours.
- On peut encore simplifier en éliminant les branches inconsistantes.

$$\begin{aligned} \textbf{if} &\quad x > 0 \\ \textbf{then} &\quad (\textbf{ if } x < 0 \textbf{ then } a \textbf{ else } b) \\ \textbf{else} &\quad c = \textbf{ if } x > 0 \textbf{ then } b \textbf{ else } c. \end{aligned}$$

Un exemple, I

```
  for(i=0; i<n; i++){
Z :  c[i] = 0;
     for(j=0; j<n; j++)
M :    c[i] += ....
}
```

- Les ordonnancements sont $\theta(Z,i) = 0, \theta(M,i,j) = j+1$.
- Il est facile de voir que $\mathrm{first}() = \langle Z, 0\rangle$.
- On doit caculer $\mathrm{next}(Z,i)$ et $\mathrm{next}(M,i,j)$.
- On trouve facilement
  $\mathrm{next}(Z,i) =$ **if** $i+1<n$ **then** $\langle Z, i+1\rangle$ **else** $\langle M,0,0\rangle$.

Exemple, II

- $\mathrm{next}(M, i, j)$ peut être une instance de Z ou de M.
- Mais les instances de Z sont toujours avant celles de M.
- On doit donc calculer :

$$\min\{\langle M, i', j'\rangle \mid \langle M, i, j\rangle \ll \langle M, i', j'\rangle\}.$$

- La contrainte s'écrit :

$$\begin{aligned} & j+1 = j'+1 \ \ \& \ \ i = i' \ \ \& \ \ j < j' \\ \vee \ & j+1 = j'+1 \ \ \& \ \ i < i' \\ \vee \ & j+1 < j'+1 \end{aligned}$$

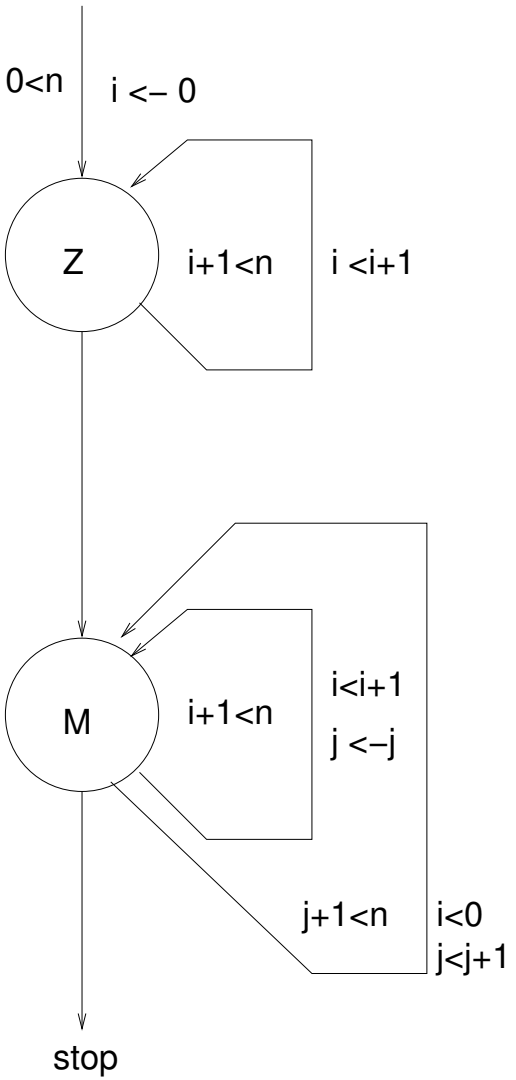
Exemple, III

- Ligne 1 : $\perp$.
- Ligne 2 : **if** $i+1<n$ **then** $\langle M, i+1, j\rangle$ **else** $\perp$.
- Ligne 3 : **if** $j+1<n$ **then** $\langle M, 0, j+1\rangle$ **else** $\perp$.

$$\begin{array}{rlll} \mathrm{next}(M,i,j) = & \textbf{if} & i+1<n & \\ & \textbf{then} & \langle M, i+1, j\rangle & \\ & \textbf{else} & \textbf{if } j+1<n & \\ & & \textbf{then } \langle M, 0, j+1\rangle & \\ & & \textbf{else } \perp & \end{array}$$

- Le dernier $\perp$ indique la fin du programme.

Exemple, IV




```
etat=I;
while(1){
  switch(etat){
    case I : i=0; suivant = Z;
             break;
    case Z : if(i+1<n) {i=i+1; suivant = Z;}
             else {i=0; j=0; suivant = M;
             }; break;
    case M : if(i+1<n) {i = i+1; suivant = M;}
             else if(j+1<n) {i=0; j=j+1; suivant = M;}
             else suivant = S;
             break;
    case S : exit;
    }
  etat = suivant;
 }
```

Où est le parallélisme ?

- L'automate ressemble à l'organigramme du programme parallèle.
- Certaines transitions sont *isochrones*: la valeur de l'ordonnancement ne change pas. C'est elles qui portent le parallélisme.
- Pour exprimer le parallélisme, on peut dérouler un état de l'automate le long d'un arc isochrone, puis regrouper les états obtenus.
- Facteur de déroulage = nombre de ressources disponibles.
- Noter que la méthode est moins puissante que le pipeline logiciel.

Conclusions provisoires

- Le problème de la génération de code à partir d'un ordonnancement reste un problème difficile.
- Deux méthodes : parcours de polyèdre ou construction d'automate.
- Parcours de polyèdre : adaptée au logiciel.
- Automates : adapté au matériel.
- La complexité peut être énorme : pour construire un automate, quadratique en nombre d'instruction et probablement exponentielle en profondeur des boucles.
- Nombreux problèmes encore à résoudre :
  1. Choix de la forme de l'ordonnancement.
  2. Elimination de tests redondants.
  3. Réduction de force (calculs de modulos).
  4. Un seul ou plusieurs automates / un seul ou plusieurs threads.
  5. Cas des opérations longues.