CORRIGÉ

1 Bisimulation

1. (a) Soient $R \subseteq X \times Y$ une bisimulation entre $T \subseteq X \times A \times X$ et $T' \subseteq Y \times A \times Y$, et $x \in X$ et $y \in Y$ deux éléments tels que xRy. Soit $u = (u_i)_{0 \leq i < \alpha} \in \mathcal{L}(x, T)$ ($\alpha \in I\!N \cup \{\omega\}$), il existe donc une suite $(x_i \stackrel{u_i}{\to} x_{i+1})_{0 \leq i < \alpha}$ de transitions de T avec $x_0 = x$. Puisque R est une simulation de T par T', on en déduit par récurrence sur i une suite $(y_i \stackrel{u_i}{\to} y_{i+1})_{0 \leq i < \alpha}$ de transitions de T' avec $y_0 = y$ et $x_i R y_i$ pour tout i, et donc $u \in \mathcal{L}(y, T')$. Du fait que R^{-1} est une simulation de T' par T on en déduit de façon symétrique $\mathcal{L}(y, T') \subseteq \mathcal{L}(x, T)$ et donc $\mathcal{L}(y, T') = \mathcal{L}(x, T)$. Supposons maintenant $(u, a) \in \mathcal{L}^e(x, T)$ c'est à dire $\exists x' \in X$: $x \stackrel{u}{\to} x' \wedge (\forall x'' \in X : \neg(x' \stackrel{a}{\to} x''))$. Par le même raisonnement que précédemment on déduit $y' \in Y$ tel que $x'Ry'$ et $y \stackrel{u}{\to} y'$, supposons $\exists y'' \in Y : y' \stackrel{a}{\to} y''$ puisque R^{-1} est une simulation de T' par T on devrait trouver un $x'' \in X$ tel que $x''Ry''$ et $x' \stackrel{a}{\to} x''$ d'où la contradiction. Ainsi $\mathcal{L}^e(x, T) \subseteq \mathcal{L}^e(y, T)$ et donc $\mathcal{L}^e(x, T) = \mathcal{L}^e(y, T)$ par symétrie.

   (b) Considérons les systèmes de transitions T et T' de la figure 1. On a $\mathcal{L}(x, T) = \mathcal{L}(y, T') = \{\epsilon, a, ab, abc, abd\}$ et $\mathcal{L}^e(x, T) = \mathcal{L}^e(y, T') = \{(u, e) | u \in \mathcal{L}(x, T) \wedge e \in \max(e)\}$ où $\max(\epsilon) = \{a\}$, $\max(a) = \{b\}$ et $\max(ab) = \emptyset = \max(abc) = \max(abd)$. Néanmoins il n'existe pas de bisimulation R entre T et T' pour laquelle xRy car sinon on aurait soit $x_{11}Ry_1$ soit $x_{12}Ry_1$, le premier cas n'est pas possible car $(b, c) \in \mathcal{L}^e(y_1, T') \setminus \mathcal{L}^e(x_{11}, T)$, et le second n'est pas possible car $(b, d) \in \mathcal{L}^e(y_1, T') \setminus \mathcal{L}^e(x_{12}, T)$.

2. Notons $T_k \subseteq X_k \times A \times X_k$ pour $k \in \{$ i, ii, iii, iv, v, vi, vii$\}$ les systèmes de transitions de la figure 2; et x_k^i désignera l'élément de X_k ayant l'étiquette i dans cette figure.

   (a) La relation $R \subseteq X_i \times X_{vi}$ donnée par $x_i^k R x_{vi}^l$ ssi ($k = 1$ et $l \in \{10, 20, 30, \cdots\}$) ou ($k = 2$ et $l \in \{11, 21, 31, \cdots\}$) ou ($k = 3$ et $l \in \{12, 22, 32, \cdots\}$) est une bisimulation entre T_i et T_{vi}.

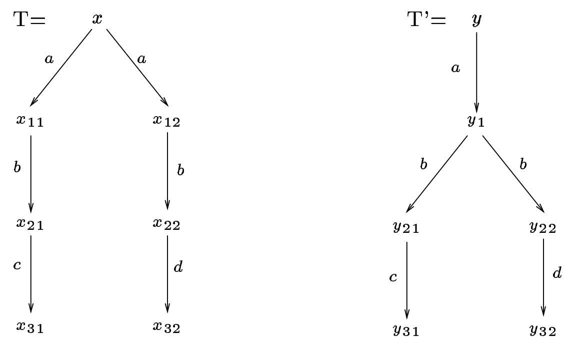

Figure 1: Deux éléments non bisimilaires et ayant même langage et même ensemble d'échecs

(b) La relation $R \subseteq X_{ii} \times X_{iv}$ ci dessous est une bisimulation entre T_{ii} et T_{iv}.

$$R = \{(x_{ii}^1, x_{iv}^1), (x_{ii}^2, x_{iv}^2), (x_{ii}^2, x_{iv}^3), (x_{ii}^3, x_{iv}^4), (x_{ii}^3, x_{iv}^5)\}$$

(c) La relation $R \subseteq X_{iii} \times X_v$ ci dessous est une bisimulation entre T_{iii} et T_v.

$$R = \{(x_{iii}^1, x_v^1), (x_{iii}^2, x_v^2), (x_{iii}^2, x_v^3), (x_{iii}^3, x_v^4), (x_{iii}^3, x_v^5)\}$$

(d) Il n'existe aucune bisimulation entre T_{vii} et T_k pour $k \in$ { i, ii, iii, iv, v, vi, }. En effet supposons que $R \subseteq X_k \times X_{vii}$ soit une telle bisimulation; on peut trouver une suite $(x_n)_{n \in I\!N}$ d' éléments de X_k telle que pour tout entier n on ait $x_n \overset{a}{\to} x_{n+1}$ en utilisant la bisimulation on construit par récurrence une suite infinie $(x'_n)_{n \in I\!N}$ d' éléments de X_{vii} telle que pour tout entier n on ait $x'_n \overset{a}{\to} x'_{n+1}$. Or dans T_{vii} il n'existe aucun élément à partir duquel on peut exécuter une suite infinie de transitions étiquetées a d'où la contradiction.

(e) Pour toutes les autres paires de sytèmes de transitions on ne peut pas trouver de bisimulation entre eux. Puisque la composée de deux bisimulation est une bisimulation il suffit de le vérifier par exemple pour les paires $\{T_i, T_{ii}\}$, $\{T_i, T_{iii}\}$ et $\{T_{ii}, T_{iii}\}$

   i. Supposons que $R \subseteq X_i \times X_{ii}$ soit une bisimulation entre T_i et T_{ii}. Nécecessairement $x_i^2 R x_{ii}^2$ car ce sont les seuls éléments

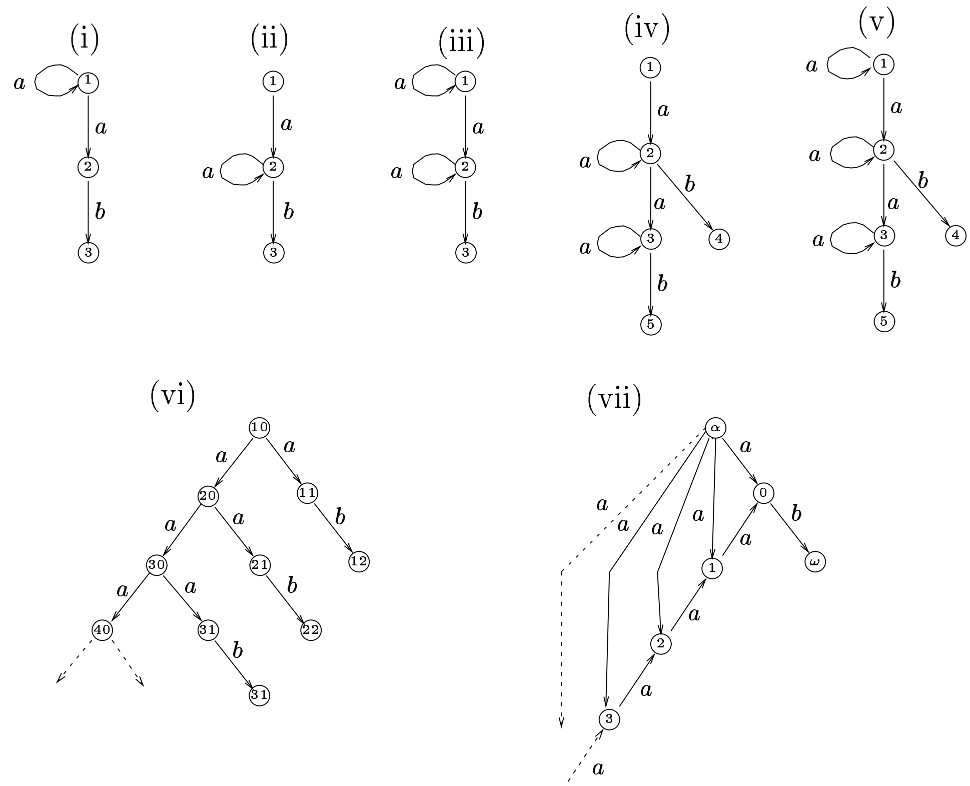

Figure 2: Quelques systèmes de transitions

de X_i et X_{ii} respectivement autorisant b. Mais x_{ii}^2 autorise a dans T_{ii} tandis que x_i^2 ne l'autorise pas dans T_i d'où la contradiction.

ii. Par le même argument il n'existe pas de bisimulation entre T_i et T_{iii}.

iii. Supposons que $R \subseteq X_{ii} \times X_{iii}$ soit une bisimulation entre T_{ii} et T_{iii}. Dans la mesure où la seule action autorisée en x_{ii}^1 est a, on a nécéssairement $x_{ii}^1 R x_{iii}^1$ mais puisque $x_{iii}^1 \xrightarrow{a} x_{iii}^1$ et que $x_{ii}^1 \xrightarrow{a} x_{ii}^2$ est la seule transition de T_{ii} étiquetée a et d'origine x_{ii}^1 on en déduit $x_{ii}^2 R x_{iii}^1$ mais l'action b est autorisée en x_{ii}^2 mais pas en x_{iii}^1, d'où la contradiction.

3. Considérons les deux systèmes de transitions de la figure 3. L'application

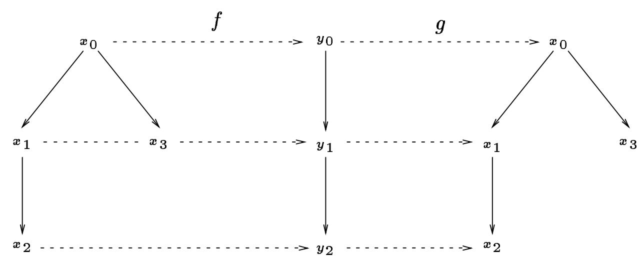

Figure 3: Deux systèmes de transitions non bisimilaires mais qui se simulent mutuellement

$f : X \to Y$ donnée par $f(x_i) = y_i$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$ et $f(x_3) = y_1$ est une simulation de T par T'; de même l'application $g : Y \to X$ donnée par $g(y_i) = x_i$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$ est une simulation de T' par T. Par contre il n'existe pas de bisimulation entre T et T', en effet si $R \subseteq X \times Y$ est une telle bisimulation alors nécessairement $x_0 R y_0$ car a est autorisé en x_0 et y_0 est le seul élément de Y dans lequel a soit autorisé. On en déduit donc également que $x_1 R y_1$ et $x_3 R y_1$ et on obtient une contradiction du fait que b est autorisée en y_1 mais pas en x_3.

4. $f : X \to Y$ est une réduction de $T \subseteq X \times A \times X$ sur $T' \subseteq Y \times A \times Y$ si et seulement si *(i)* $G_f \subseteq X \times Y$ est une simulation de T par T' i.e. $x \xrightarrow{a} x'$ dans T entraîne $f(x) \xrightarrow{a} f(x')$ dans T' (la première condition est automatiquement vérifiée car G_f est une relation fonctionnelle) et *(ii)* G_f^{-1} est une simulation de T' par T i.e. f est surjective, et $f(x) \xrightarrow{a} y'$ dans T' entraîne l'existence d'un x dans X pour lequel $x \xrightarrow{a} x'$ dans T et $f(x') = y'$. Donc si f est une réduction injective, il s'agit d'une bijection telle que $x \xrightarrow{a} x'$ si et seulement si $f(x) \xrightarrow{a} f(x')$ c'est à dire qu'il s'agit d'un isomorphisme entre T et T'.

2 Propriétés algébriques de la bisimulation

1. Toute congruence $R \subseteq X \times X$ de $T \subseteq X \times A \times X$ passe au quotient: on peut définir un système de transition $T/R \subseteq X/R \times A \times X/R$ en posant $[x] \xrightarrow{a} [x']$ dans T/R ssi $x \xrightarrow{a} x'$ dans T. Soit $T' \subseteq X/R \times A \times X/R$, la projection canonique $\pi_R : X \to X/R$ est une réduction de T sur T'

ssi *(i)* $x \xrightarrow{a} x' \Rightarrow [a] \xrightarrow{a} [x']$ dans T' et *(ii)* $[x] \xrightarrow{a} y$ dans $T' \Rightarrow \exists x' \in X$: $x \xrightarrow{a} x'$ et $y = [x']$ i.e. $T' = T/R$. C'est dire que la structure quotient est l'unique structure de système de transitions sur l'ensemble quotient qui fasse de la projection canonique une réduction.

2. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Z$ des réductions de $T \subseteq X \times A \times X$ sur $T' \subseteq Y \times A \times Y$ et $T'' \subseteq Z \times A \times Z$ respectivement. Puisque f est surjective ($G_f^{-1} G_f = id_Y$) il existe une unique relation $H \subseteq Y \times Z$ telle que $G_g = G_f H$ à savoir $H = G_f^{-1} G_g$ i.e. yHz ssi $\exists x \in X$: $y = f(x) \wedge g(x) = z$, et donc H est (le graphe d') une application $h : Y \rightarrow Z$ si, et seulement si, $ker(f) \subseteq ker(g)$. Donc une telle application lorsqu'elle existe est unique (par surjectivité de f) et c'est une réduction car son graphe est une bisimulation en tant que composée de deux bisimulations.

3. Soit $T \subseteq X \times A \times X$ un système de transitions. L'union R des autobisimulations de T (bisimulations entre T et T) est une autobisimulation, de plus il s'agit d'une relation d'équivalence car la relation identité, l'inverse d'une autobisimulation et la composée de deux autobisimulations sont des autobisimulations. Soit $\overline{T} = T/R$ la structure quotient. Montrons que la projection canonique est une réduction maximale $\pi : T \rightarrow \overline{T}$ de T. Soit, par conséquent $f : T \rightarrow T'$ une autre réduction de T où $T' \subseteq X' \times A \times X'$. Le noyau de cette application $\ker(f) = G_f G_f^{-1}$ est une congruence de T. f est surjective et $\ker(f) \subseteq R$, il existe donc une (unique) application $g : X' \rightarrow X/R$ telle que $\pi = g \circ f$. g est la réduction par (2).

4. Soient $T \subseteq X \times A \times X$ et $T' \subseteq Y \times A \times Y$ deux systèmes de transitions et $R \subseteq X \times Y$ une relation, et $T \wedge_R T' \subseteq R \times A \times R$ donnée par la structure produit : $(x, y) \xrightarrow{a} (x', y')$ si et seulement si xRy, $x'Ry'$, $x \xrightarrow{a} x'$ dans T et $y \xrightarrow{a} y'$ dans T'. Si les projections $\pi_1 : R \rightarrow X$ et $\pi_2 : R \rightarrow Y$ sont des réductions de $T \wedge_R T'$ dans T et T' respectivement, alors $R = G_{\pi_1}^{-1} G_{\pi_2}$ est une bisimulation entre T et T' comme composée de deux bisimulations. Réciproquement si R est une bisimulation montrons que π_1 (et donc π_2 par symétrie) est une réduction. D'une part les deux projections d'une bisimulation sont des surjections, par ailleurs si $(x, y) \xrightarrow{a} (x', y')$ alors, par définition de $T \wedge_R T'$, $x \xrightarrow{a} x'$, enfin si $(x, y) \xrightarrow{a} Z$

dans $T \wedge_R T'$ cela signifie que $Z = (x', y')$ avec $x \xrightarrow{a} x'$ dans T et $y \xrightarrow{a} y'$ dans T' et $x'Ry'$.

5. Soit $\equiv$ une congruence de $T + T'$, alors $R \subseteq X \times Y$ donnée par xRy ssi $(x, 0) \equiv (y, 1)$ est une bisimulation entre T et T'. En effet les deux projections de R sont surjectives car chaque classe de $\equiv$ contient au moins un élément de X et un élément de Y, par ailleurs si xRy et $x \xrightarrow{a} x'$, i.e. $(x, 0) \equiv (y, 1)$ et $(x, 0) \xrightarrow{a} (x', 0)$, on déduit du fait que $\equiv$ est une bisimulation que $(y, 1) \xrightarrow{a} (y', 1)$ i.e. $y \xrightarrow{a} y'$ dans T' pour un certain y tel que $(x', 0) \equiv (y', 1)$ i.e. xRy, donc R est une simulation de T sur T', R^{-1} est par symétrie une simulation de T' par T. Réciproquement, soit R une bisimulation entre T et T' et soit $\equiv$ la relation d'équivalence engendrée par R sur $X + Y$, c'est à dire $\equiv = (R + R^{-1})^*$. Si on appelle distance entre z et z' tels que $z \equiv z'$ le plus petit entier n pour lequel $z(R + R^{-1})^n z'$ on vérifie par récurrence sur la distance entre z et z' que $\equiv$ vérifie la propriété de transfert: $(z \equiv z'$ et $z \xrightarrow{a} \hat{z}) \Rightarrow (\exists \hat{z}' : z' \xrightarrow{a} \hat{z}'$ et $\hat{z} \equiv \hat{z}')$. De cette propriété de transfert et du fait que $\equiv$ est une relation d'équivalence on déduit qu'il s'agit d'une congruence de $T + T'$; de plus puisque les projections de R sont surjectives on déduit que chaque classe de $\equiv$ contient au moins un élément de X et un élément de Y.

6. Soit $R \subseteq X \times Y$ une bisimulation entre $T \subseteq X \times A \times X$ et $T' \subseteq Y \times A \times Y$ et $\equiv$ la relation d'équivalence engendrée par R sur $X + Y$, c'est à dire $\equiv = (R + R^{-1})^*$. Nous avons vu qu'il s'agit d'une congruence de $T + T'$, posons $T \vee_R T' = (T + T')/\equiv$ le système de transition quotient. Posons $j_1 = \pi \circ in_1$ et $j_2 = \pi \circ in_2$ les compositions respectives de la projection canonique $\pi : X + Y \to (X + Y)/\equiv$ avec les injections $X \xrightarrow{in_1} X + Y \xleftarrow{in_2} Y$, i.e. $j_1(x) = [(x, 0)]$ et $j_2(y) = [(y, 1)]$. Puisque chaque classe de $\equiv$ contient au moins un élément de X et un élément de Y, ces applications sont surjectives, de plus $x \xrightarrow{a} x'$ dans $T \Rightarrow (x, 0) \xrightarrow{a} (x', 0)$ dans $T + T' \Leftrightarrow [(x, 0) \xrightarrow{a} [(x', 0)]$ dans $T \vee_R T'$, et inversement si $[(x, 0) \xrightarrow{a} z$ dans $T \vee_R T'$ alors z est la classe d'un élément de $X + Y$ qui peut être choisi dans X i.e. de la forme $z = [(x', 0)]$ et on a $(x, 0) \xrightarrow{a} (x', 0)$ dans $T + T'$ (d'après 2.1). Et donc $x \xrightarrow{a} x'$ dans T par définition de $T + T'$. Ainsi $j_1 : T \to T \vee_R T'$ et $j_2 : T' \to T \vee_R T'$ sont des réductions. Montrons que ces réductions vérifient la propriété universelle suivante: pour toute

paire de réductions $T \xrightarrow{f_1} S \xleftarrow{f_2} T'$ (avec $S \subseteq Z \times A \times Z$) pour lesquelles $f_1(x) = f_2(y)$ dès que xRy, il existe une unique réduction $f : T \vee_R T' \to S$ telle que $f_1 = f \circ j_1$ et $f_2 = f \circ j_2$. Considérons par conséquent une telle paire de réductions f_1 et f_2. Par propriété de la somme, il existe une unique application $\overline{f} : X + Y \to Z$ pour laquelle $f_1 = \overline{f} \circ in_1$ et $f_2 = \overline{f} \circ in_2$, à savoir $\overline{f}$ donnée par: $\overline{f}(x, 0) = f_1(x)$ et $\overline{f}(y, 1) = f_2(x)$. La condition $xRy \Rightarrow f_1(x) = f_2(y)$ exprime que $R \subseteq \ker(\overline{f})$ et comme cette dernière est une relation d'équivalence on déduit $\equiv \subseteq \ker(\overline{f})$ et donc il existe une unique application $f : (X + Y)/\equiv \to Z$ telle que $\overline{f} = f \circ \pi$ et donc telle que $f \circ j_1 = f_1$ et $f \circ j_2 = f_2$. Supposons que g soit une autre application de $(X + Y)/\equiv$ dans Z telle que $g \circ j_1 = f_1$ et $g \circ j_2 = f_2$. Alors $f_1 = (g \circ \pi) \circ in_1$ et $f_2 = (g \circ \pi) \circ in_2$, d'où $g \circ \pi = \overline{f}$ et $g = f$, ce qui prouve l'unicité de f. On montre que $\overline{f}$ est une réduction de $T + T'$ sur S ce qui nous permet de déduire que $f = \overline{f}/\pi$ est une réduction de $T \vee_R T'$ sur S. $\overline{f}$ est surjective car f_1 et f_2 le sont en tant que réductions, une transition de $T + T'$ est soit de la forme $(x, 0) \xrightarrow{a} (x', 0)$ pour $x \xrightarrow{a} x'$ dans T ou de la forme $(y, 1) \xrightarrow{a} (y', 1)$ pour $y \xrightarrow{a} y'$ dans T'. Dans le premier cas on déduit $f_1(x) \xrightarrow{a} f_1(x')$ i.e. $\overline{f}(x, 0) \xrightarrow{a} \overline{f}(x', 0)$ l'autre cas est similaire. Dans l'autre direction considérons $\overline{f}(u) \xrightarrow{a} z$ une transition de S , si $u = in_1(x)$ pour $x \in X$ alors cette transition s'écrit $f_1(x) \xrightarrow{a} z$ et puisque f_1 est une réduction, il existe $x' \in X$ tel que $z = f_1(x)$ et $x \xrightarrow{a} x'$, i.e. $\exists u' = in_1(x') \in X + Y$: $u \xrightarrow{a} u'$ dans $T + T'$ et $\overline{f}(u') = z$. Le cas $u = in_2(y)$ pour $y \in Y$ est similaire.

7. $T \wedge_R T'$ vérifie la propriété universelle suivante: pour tout système de transitions $S \subseteq Z \times A \times Z$ et toute paire de réductions $T \xleftarrow{f_1} S \xrightarrow{f_2} T'$ telles que $\forall z \in Z :\ f_1(z) R f_2(z)$, il existe une unique réduction $f : S \to T \wedge_R T'$ telle que $f_1 = \pi_1 \circ f$ et $f_2 = \pi_2 \circ f$.

8. Montrons qu'il y a équivalence entre les trois assertions suivantes : *(i)* il existe une bisimulation entre T et T', *(ii)* les systèmes de transitions T et T' se réduisent en un même troisième et *(iii)* les sytèmes de transitions T et T' sont des réductions d'un même troisième.

   (a) *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* par 2.5.

   (b) *(i)* $\Rightarrow$ *(iii)* par 2.3.

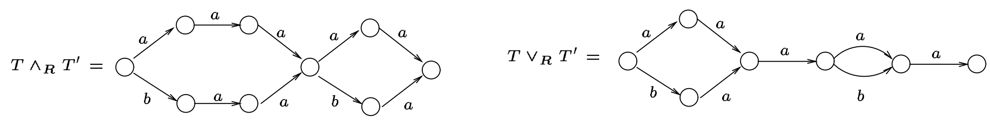

Figure 4: la relation $R \subseteq X \times Y$ donnée par $(i,j)R(i',j') \Leftrightarrow i = i'$ est une bisimulation de $T \subseteq X \times A \times X$ et $T' \subseteq Y \times A \times Y$

(c) *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* car si $f : T \to T''$ et $g : T' \to T''$ sont des réductions alors $R = fg^{-1}$ est (en tant que composée de deux bisimilations) une bisimulation entre T et T'.

(d) *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* car si $f : T'' \to T$ et $g : T'' \to T'$ sont des réductions alors $R = f^{-1}g$ est (en tant que composée de deux bisimilations) une bisimulation entre T et T'.

9. Les systèmes de transitions $T \wedge_R T'$ et $T \vee_R T'$ sont représentés dans la figure 4.

3 Bisimilarité

1. Une relation d'équivalence $R \subseteq X \times X$ est une congruence de $T \subseteq X \times A \times X$ si et seulement si elle vérifie la condition suivante :

$$xRy \Rightarrow \begin{cases} x \stackrel{a}{\to} x' & \Rightarrow & \exists y' \,.\, y \stackrel{a}{\to} y' \text{ and } x'Ry' \\ y \stackrel{a}{\to} y' & \Rightarrow & \exists x' \,.\, x \stackrel{a}{\to} x' \text{ and } x'Ry' \end{cases}$$

c'est à dire s'il s'agit d'un *post-point fixe* de l'opérateur monotone $\mathcal{F}$ (i.e. $R \subset \mathcal{F}(R)$) défini comme suit sur le treillis des relations d'équivalence sur X :

$$x\mathcal{F}Ry \Leftrightarrow \begin{cases} x \stackrel{a}{\to} x' & \Rightarrow & \exists y' \,.\, y \stackrel{a}{\to} y' \text{ and } x'Ry' \\ y \stackrel{a}{\to} y' & \Rightarrow & \exists x' \,.\, x \stackrel{a}{\to} x' \text{ and } x'Ry' \end{cases}$$

Le plus grand point fixe de $\mathcal{F}$ est la borne supérieure de ses post-point fixes dans le treillis des relations d'équivalence de X, cette borne supérieure est donnée par la réunion ensembliste du fait que cette réunion est également un post-point fixe (c'est une autobisimulation de T –i.e. une bisimulation entre T et T– car la classe des autobisimulations est close par union arbitraire et c'est une relation d'équivalence car la classe des post-point fixes de $\mathcal{F}$ contient la relation identité et est close par passage à l'inverse et par composition) ainsi :

$$\nu\mathcal{F} = \bigvee\{R \ : \ R \subseteq \mathcal{F}(R)\} = \bigcup\{R \ : \ R \subseteq \mathcal{F}(R)\}$$

Comme la relation d'équivalence $(R \cup R^{-1})^*$ engendrée par une autobisimulation R est également une autobisimulation (et donc un post-point fixe de $\mathcal{F}$) on en déduit que la relation de bisimilarité $\equiv$ qui est par définition la réunion des autobisimulations de T est le plus grand point fixe de $\mathcal{F}$.

2. on définit la suite $(\equiv_n; n \in I\!N)$ des approximations de la relation de bisimilarité de la manière suivante: $\equiv_0$ désigne la relation universelle : $x \equiv_0 y$ pour tous x et y dans X; et on pose $\equiv_{n+1} = \mathcal{F}(\equiv_n)$ pour tout $n \in I\!N$. C'est à dire que la suite des équivalences $\equiv_n$ est la suite des itérées $\equiv_n = \mathcal{F}^n(1)$ de l'opérateur $\mathcal{F}$ à partir de la relation universelle $1 = X \times X$ qui est le plus grand élément du treillis des relations d'équivalence sur X. Comme l'opérateur $\mathcal{F}$ est monotone cette suite est décroissante et elle est minorée par $\nu\mathcal{F}$ car $\nu\mathcal{F} \subseteq 1$ et $\nu\mathcal{F} \subseteq R \Rightarrow \nu\mathcal{F} = \mathcal{F}(\nu\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}(R)$. Donc $\nu\mathcal{F} \subseteq \equiv_\omega$ avec $\equiv_\omega = \bigcap_{n \in I\!N} \equiv_n$. Pour démontrer l'inclusion inverse ($\equiv_\omega \subseteq \nu\mathcal{F}$) il suffit de démontrer que $\equiv_\omega$ est un post-point fixe de $\mathcal{F}$ c'est à dire

$$\equiv_\omega \subseteq \mathcal{F}(\equiv_\omega)$$

Montrons donc que cette inclusion est vérifiée si le système de transitions T est à images finies. Supposons $x \equiv_\omega y$, c'est à dire que pour tout entier n, on a $x \equiv_{n+1} y$:

$$x \xrightarrow{a} x' \Rightarrow \exists y'_n \ : \ (y \xrightarrow{a} y'_n \wedge x' \equiv_n y'_n)$$

et la condition symétrique $(y \xrightarrow{a} y' \Rightarrow \exists x'_n \ : \ (x \xrightarrow{a} x'_n \wedge x'_n \equiv_n y'))$. Puisque T est à branchement fini il existe une infinité d'indices n procurant un même y_n, autrement dit sous l'hypothèse $x \xrightarrow{a} x'$ on déduit l'existence d'un élément y' tel que $y \xrightarrow{a} y'$ et tel que $x' \equiv_n y'$ pour une infinité d'indices n. Mais comme la suite de relations $\equiv_n$ est décroissante d'intersection $\equiv_\omega$, cette dernière condition entraîne $x' \equiv_\omega y'$. De façon symétrique on obtient

$$y \xrightarrow{a} y' \Rightarrow \exists x' \ : \ (x \xrightarrow{a} x' \wedge x' \equiv_\omega y')$$

Et donc $x\mathcal{F}(\equiv_\omega)y$.

3. Montrons par récurrence sur $n \in I\!N$ que $x_n \equiv_n y_n \equiv_n x_n + y_n$ et $x_n \not\equiv_{n+1} y_n \not\equiv_{n+1} x_n + y_n \not\equiv_{n+1} x_n$.

   (a) Pour $n = 0$: $x_0 \equiv_0 y_0 \equiv_0 x_0 + y_0$ car $\equiv_0$ est la relation universelle; $x \equiv_1 y$ ssi $Init(x) = Init(y)$ où $Init(x) = \{a \in A | \ \exists y \ : x \xrightarrow{a} y\}$ est l'ensemble des lettres de A autorisées en x. $Init(x_0) = \{b\}$, $Init(y_0) = \{c\}$ et $Init(x_0 + y_0) = \{b, c\}$, donc $x_0 \not\equiv_1 y_0 \not\equiv_1 x_0 + y_0 \not\equiv_1 x_0$.

   (b) Supposons la propriété pour n et vérifions la pour $n + 1$. Notons que $x \equiv_{n+1} y$ ssi $\forall a \in A \ \pi_n(x.a) = \pi_n(y.a)$ où $x.a = \{y | x \xrightarrow{a} y\}$ est l'ensemble des éléments accessibles à partir de x par une transition étiquetée a; et si $E \subseteq X$, $\pi_n(E) = \{[x]_{\equiv_n} | x \in E\}$ est l'ensemble des classes d'éléments de E modulo l'équivalence $\equiv_n$. pour simplifier les notations écrivons $[x]_n$ pour $[x]_{\equiv_n}$. Pour $b \neq a$, $x_{n+1}.b = y_{n+1}.b = (x_{n+1} + y_{n+1}).b = \emptyset$ et $x_{n+1}.a = \{x_n + y_n\}$, $y_{n+1}.a = \{x_n, y_n\}$ et $(x_{n+1} + y_{n+1}).a = \{x_n, y_n, x_n + y_n\}$, par hypothèse de récurrence on en déduit $\pi_n(x_{n+1}.a) = \pi_n(y_{n+1}.a) = \pi_n((x_{n+1} + y_{n+1}).a)$ et $\pi_{n+1}(x_{n+1}.a) \neq \pi_{n+1}(y_{n+1}.a) \neq \pi_{n+1}((x_{n+1}+y_{n+1}).a) \neq \pi_{n+1}(x_{n+1}.a)$ par conséquent $x_{n+1} \equiv_{n+1} y_{n+1} \equiv_{n+1} x_{n+1} + y_{n+1}$ et $x_{n+1} \not\equiv_{n+2} y_{n+1} \not\equiv_{n+2} x_{n+1} + y_{n+1} \not\equiv_{n+2} x_{n+1}$.

4 Logique de Hennessy et Milner

1.

$$\begin{array}{rcl} T, x \models 0 & & \text{n'est jamais vraie} \\ T, x \models \varphi \vee \psi & \textbf{ssi} & T, x \models \varphi \ \text{ ou } \ T, x \models \psi \\ T, x \models \forall_a \varphi & \textbf{ssi} & \forall y \ : \ (x \xrightarrow{a} y \ \Rightarrow \ T, y \models \varphi) \end{array}$$

2. On définit par récurrence les formules φ_n et ψ_n par $\varphi_0 = \exists_b 1$, $\psi_0 = \exists_c 1$, $\varphi_{n+1} = \exists_a(\varphi_n \wedge \psi_n)$ et $\psi_n = \forall_a[(\varphi_n \wedge \neg\psi_n) \vee (\neg\varphi_n \wedge \psi_n)]$. Alors φ_n est vérifiée en x_n mais pas en y_n tandis que ψ_n est vérifiée en y_n mais pas en x_n.

3. Montrons que si T est à images finies les relations définies par

$$x \cong_k y \ \textbf{ ssi } \ \forall \varphi \in \mathrm{HML}_k \ \ (T, x \models \varphi \Leftrightarrow T, y \models \varphi)$$

coïncident avec les approximations de la relation de bisimilarité. $\cong_0$ est la relation universelle il suffit donc de montrer $\mathcal{F}(\cong_n) = \cong_{n+1}$ pour tout entier n.

(a) Montrons par la contraposée que $\mathcal{F}(\cong_n) \subseteq \cong_{n+1}$. Supposons donc x et y ne vérifiant pas $x \cong_{n+1} y$ cela signifie qu'il existe une formule $\varphi \in \mathrm{HML}_{n+1}$ qui distingue x et y c'est à dire qui est vérifiée par l'un d'eux mais pas par l'autre. Si cette formule est une négation $\varphi = \neg\psi$ alors $\psi \in \mathrm{HML}_{n+1}$ distingue aussi x et y, si c'est une conjonction $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ alors l'une des formules φ_1 ou φ_2 (qui sont dans HML_{n+1}) distingue également x et y. On peut donc supposer φ de la forme $\exists_a \psi$ avec $\psi \in \mathrm{HML}_n$. Sans perte de généralité on peut supposer que x vérifie φ et y ne la vérifie pas. C'est à dire qu'il existe une transition $x \stackrel{a}{\to} x'$ où x' vérifie ψ tandis que pour toute transition $y \stackrel{a}{\to} y'$, l'état y' ne vérifie pas ψ, c'est à dire qu'aucun de ces y' n'est équivalent modulo les formules de HML_n (i.e. par $\cong_n$) à x', autrement dit $x\mathcal{F}(\cong_n)y$ n'est pas vérifiée.

(b) On montre par la contraposée que $\cong_{n+1} \subseteq \mathcal{F}(\cong_n)$. Supposons donc x et y tels que $\neg(x\mathcal{F}(\cong_n)y)$. Cela signifie qu'il existe une transition $x \stackrel{a}{\to} x'$ telle que pour toute transition $y \stackrel{a}{\to} y'$ on ait $x' \ncong_n y'$ (ou bien la condition symétrique). Donc il existe une formule $\varphi_{y'} \in \mathrm{HML}_n$ vérifiée par x' mais pas par y'. Cette formule dépend de y' néanmoins comme le système de transition est à images finies on peut prendre la conjonction de ces formules $\varphi = \bigwedge\{\varphi_{y'} | y \stackrel{a}{\to} y'\}$ qui est donc vérifiée par x' et par aucun des y' tels que $y \stackrel{a}{\to} y'$. La formule $\psi = \exists_a \varphi$ est alors une formule de HML_{n+1} qui est vérifiée par x et pas par y et ainsi $x \ncong_{n+1} y$.