Les questions constituant ce sujet sont assez largement indépendantes les unes des autres, et en tout état de cause chacune peut être traitée en admettant les résultats des questions précédentes.

Si $R \subseteq X \times Y$ est une relation binaire, on utilisera la notation xRy comme abréviation de $(x, y) \in R$. La relation inverse $R^{-1} \subseteq Y \times X$ est définie par $yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$; la composée $RS \subseteq X \times Z$ de deux relations $R \subseteq X \times Y$ et $S \subseteq Y \times Z$ est définie par $xRSz \Leftrightarrow \exists y \in Y \,:\, xRy \wedge ySz$.

Un alphabet A est un ensemble *fini* de symboles appelés lettres. On note A^* (respectivement A^ω) l'ensemble des *mots* finis (resp. infinis) sur l'alphabet A, c'est à dire l'ensemble des suites finies $u = (u_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ (resp. infinies $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$) d'éléments u_i de A. Un système de transitions étiquetées dans A et de *support* X est une relation ternaire $T \subseteq X \times A \times X$. On notera $x \xrightarrow{a} y$ pour $(x, a, y) \in T$, il correspond à T une famille de relations binaires $\xrightarrow{a} \subseteq X \times X$ indexée par les lettres $a \in A$ de l'alphabet. On notera $\rightarrow = \cup_{a \in A} \xrightarrow{a}$ la réunion de ces relations. Un système de transitions est *à* *branchement fini* si pour tout élément $x \in X$, l'ensemble $\{y \in X | x \rightarrow y\}$ de ses successeurs est fini. Deux systèmes de transitions $T \subseteq X \times A \times X$ et $T' \subseteq Y \times A \times Y$ sont *isomorphes* s'il existe une bijection $f : X \rightarrow Y$ entre leurs supports respectifs telle que $x \stackrel{a}{\rightarrow} x'$ dans T si, et seulement si, $f(x) \stackrel{a}{\rightarrow} f(x')$ dans T'.

1 Bisimulation

Une *simulation* d'un système de transitions $T \subseteq X \times A \times X$ par un système de transitions $T' \subseteq Y \times A \times Y$ est une relation binaire $R \subseteq X \times Y$ telle que *(i)* $\forall x \in X \quad \exists y \in Y \ : \ xRy$ et *(ii)* $(xRy$ et $x \stackrel{a}{\rightarrow} x') \Rightarrow \exists y' \in Y : (y \stackrel{a}{\rightarrow} y'$ et $x'Ry')$. Si R est une simulation de T par T' et R^{-1} une simulation de T' par T on dit que R est une *bisimulation* entre T et T'. Une *réduction* de T sur T' est une application $f : X \rightarrow Y$ dont le graphe $G_f = \{(x, y) \in X \times Y | y = f(x)\}$ est une bisimulation entre T et T'.

1. Si $T \subseteq X \times A \times X$ est un système de transitions, x et y des éléments de X et $u = (u_i)_{0 \leq i < n} \in A^*$ un mot de longueur n on note $x \stackrel{u}{\rightarrow} y$ s'il existe une suite (finie) $(x_i \stackrel{u_i}{\rightarrow} x_{i+1})_{0 \leq i < n}$ de transitions de T avec $x = x_0$ et $y = x_n$. De même si $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un mot infini, on note $x \stackrel{u}{\rightarrow}$ s'il existe une suite $(x_i \stackrel{u_i}{\rightarrow} x_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ de transitions avec $x = x_0$. L'ensemble $\mathcal{L}(x, T) = \mathcal{L}^*(x, T) \cup \mathcal{L}^\omega(x, T)$ désigne l'ensemble des mots finis $\mathcal{L}^*(x, T) = \{u \in A^* | \exists y \in X : x \stackrel{u}{\rightarrow} y\}$ et infinis $\mathcal{L}^\omega(x, T) = \{u \in A^\omega | x \stackrel{u}{\rightarrow}\}$ reconnus dans T à partir de x. L'ensemble des *échecs* de x dans T est l'ensemble $\mathcal{L}^e(x, T) = \{(u, a) \in A^* \times A | \exists y \in X : x \stackrel{u}{\rightarrow} y \wedge (\forall z \in X : \neg(y \stackrel{a}{\rightarrow} z))\}$ c'est à dire que (u, a) est un échec pour x si on peut exécuter à partir de x une suite de transitions étiquetée par le mot u et aboutir ainsi à un élément dans lequel l'action a n'est pas exécutable.
   (a) Montrer que si $R \subseteq X \times Y$ est une bisimulation entre $T \subseteq X \times A \times X$ et $T' \subseteq Y \times A \times Y$ alors pour tout $x \in X$ et $y \in Y$ tels que xRy on a $\mathcal{L}(x, T) = \mathcal{L}(y, T')$ et $\mathcal{L}^e(x, T) = \mathcal{L}^e(y, T')$.
   (b) Indiquer deux systèmes de transitions $T \subseteq X \times A \times X$ et $T' \subseteq Y \times A \times Y$ accessibles respectivement à partir de x et y (c'est à dire $\forall x' \in X \exists u \in A^* : x \stackrel{u}{\rightarrow} x'$, idem pour y) tels que $\mathcal{L}(x, T) = \mathcal{L}(y, T')$ et $\mathcal{L}^e(x, T) = \mathcal{L}^e(y, T')$ et pour lesquels il n'existe pas de bisimulation $R \subseteq X \times Y$ telle que xRy.

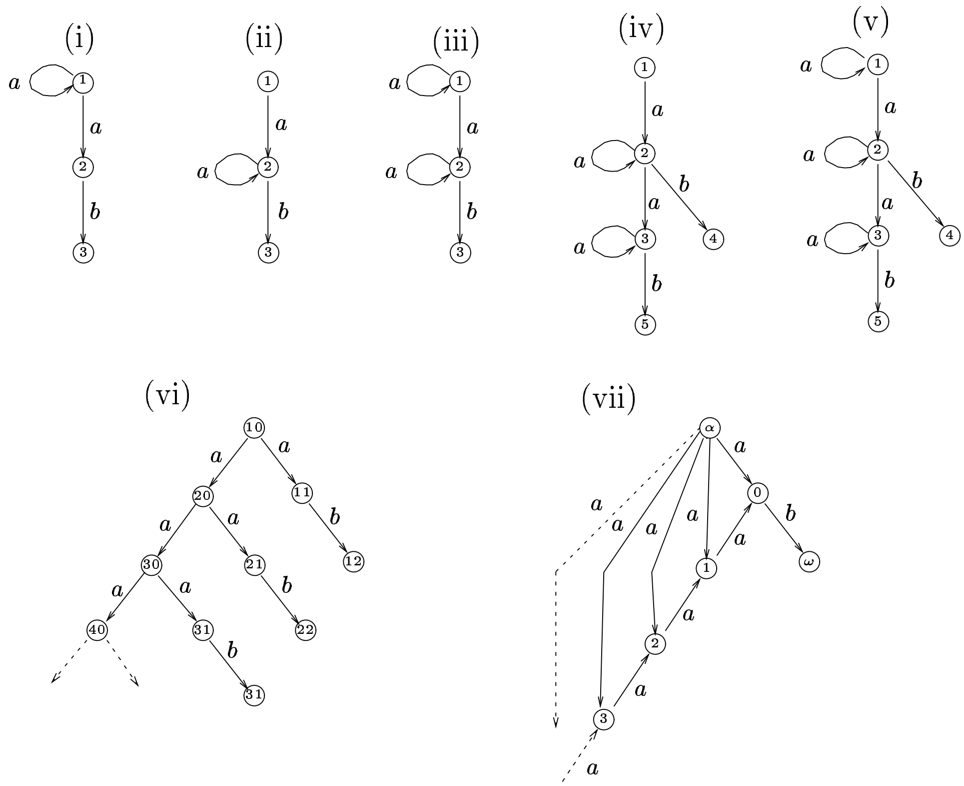

Figure 1: Quelques systèmes de transitions

2. Pour chaque paire de systèmes de transitions pris parmi ceux de la figure (1) indiquer une bisimulation entre ces systèmes ou montrer qu'une telle bisimulation ne peut pas exister.
   Indication : utiliser le fait que la composée de deux bisimulations est une bisimulation pour éviter de considérer tous les cas.

3. Montrer qu'il peut exister une simulation de T par T' et une simulation de T' par T sans qu'il y ait de bisimulation entre T et T'.

4. Montrer qu'une application $f : X \to Y$ est une réduction de $T \subseteq X \times A \times X$ sur $T' \subseteq Y \times A \times Y$ si, et seulement si, *(i)* f est surjective, *(ii)* $x \stackrel{a}{\to} x'$ dans T entraîne $f(x) \stackrel{a}{\to} f(x')$ dans T' et *(iii)* $f(x) \stackrel{a}{\to} y'$ dans T' entraîne l'existence d'un x' dans X pour lequel $x \stackrel{a}{\to} x'$ dans T et $f(x') = y'$. En déduire qu'une réduction injective est un isomorphisme

de systèmes de transitions.

2 Propriétés algébriques de la bisimulation

Dans cette partie on étudie quelques propriétés algébriques de la bisimulation. On appelle *congruence* sur $T \subseteq X \times A \times X$ une relation d'équivalence sur X qui est une bisimulation entre T et lui même.

1. Soit R une congruence sur T, notons X/R l'ensemble quotient c'est à dire l'ensemble des classes $\overline{x}$ des éléments $x \in X$. Montrer qu'il existe une unique structure de système de transitions $T/R \subseteq X/R \times A \times X/R$ sur l'ensemble quotient X/R, pour laquelle la projection canonique $\pi_R : X \to X/R$ est une réduction de T sur le système de transition quotient T/R.

2. Si $f : X \to Y$ et $g : X \to Z$ sont des réductions de $T \subseteq X \times A \times X$ sur $T' \subseteq Y \times A \times Y$ et $T'' \subseteq Z \times A \times Z$ respectivement, on note $f \leq g$ s'il existe une application $h : Y \to Z$ telle que $g = h \circ f$. Montrer qu'une telle application h lorsqu'elle existe est unique et qu'il s'agit d'une réduction de T' sur T''.

3. Montrer que tout système de transition T admet une réduction maximale, c'est à dire une réduction $\pi : T \to \overline{T}$ telle que pour toute autre réduction $f : T \to T'$ il existe une unique réduction $g : T' \to \overline{T}$ telle que $\pi = g \circ f$.

4. Montrer que si $T \subseteq X \times A \times X$ et $T' \subseteq Y \times A \times Y$ sont deux systèmes de transitions et $R \subseteq X \times Y$ une relation, alors R est une bisimulation entre T et T' si, et seulement si, les projections $\pi_1 : R \to X$ et $\pi_2 : R \to Y$ sont des réductions de $T \wedge_R T'$ dans T et T' respectivement (où $T \wedge_R T' \subseteq R \times A \times R$ est donnée par la structure produit : $(x, y) \xrightarrow{a} (x', y')$ si, et seulement si, xRy, $x'Ry'$, $x \xrightarrow{a} x'$ dans T et $y \xrightarrow{a} y'$ dans T').

5. Si $T \subseteq X \times A \times X$ et $T' \subseteq Y \times A \times Y$ sont deux systèmes de transitions on définit la somme de T et T' par $T + T' \subset (X + Y) \times A \times (X + Y)$ où $X + Y$ désigne l'union disjointe des ensembles X et Y: $X + Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$ et $T + T'$ contient les transitions $(x, 0) \xrightarrow{a} (x', 0)$ pour $x \xrightarrow{a} x'$ dans T et les transitions $(y, 1) \xrightarrow{a} (y', 1)$ pour $y \xrightarrow{a} y'$ dans

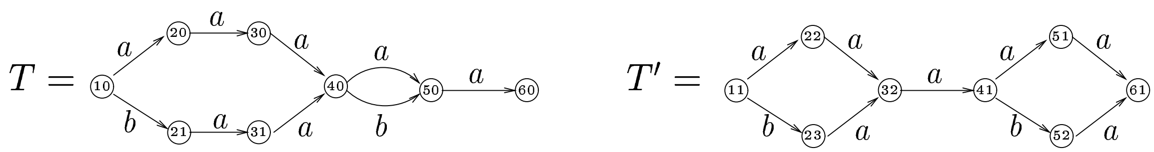

Figure 2: la relation $R \subseteq X \times Y$ donnée par $(i,j)R(i',j') \Leftrightarrow i = i'$ est une bisimulation de $T \subseteq X \times A \times X$ et $T' \subseteq Y \times A \times Y$

T'. Montrer qu'il existe une bisimulation entre T et T' si, et seulement si, il existe une congruence de $T + T'$ dont chaque classe contient au moins un élément de X et un élément de Y.

6. Montrer que si R est une bisimulation entre T et T' alors il existe un système de transition $T \vee_R T'$ et des réductions $j_1 : T \to T \vee_R T'$ et $j_2 : T' \to T \vee_R T'$ vérifiant la propriété universelle suivante: pour toute paire de réductions $T \xrightarrow{f_1} S \xleftarrow{f_2} T'$ pour laquelle $f_1(x) = f_2(y)$ dès que xRy, il existe une unique réduction $f : T \vee_R T' \to S$ telle que $f_1 = f \circ j_1$ et $f_2 = f \circ j_2$.

7. Enoncer sans la prouver la propriété universelle vérifiée par le système de transition $T \wedge_R T'$.

8. Montrer qu'il y a équivalence entre les trois assertions suivantes : *(i)* il existe une bisimulation entre T et T', *(ii)* les systèmes de transitions T et T' se réduisent en un même troisième et *(iii)* les systèmes de transitions T et T' sont des réductions d'un même troisième.

9. Représenter les systèmes de transitions $T \wedge_R T'$ et $T \vee_R T'$ où T et T' sont les systèmes de transitions et R la bisimulation précisés dans la figure 2.

3 Bisimilarité

On dit que deux éléments x et y d'un système de transition $T \subseteq X \times A \times X$ sont *bisimilaires* s'il existe une congruence R de T pour laquelle xRy. On rappelle que l'ensemble des relations d'équivalence sur un ensemble X est un treillis complet : la borne inférieure d'une famille de relations d'équivalence $\bigwedge_i R_i = \bigcap_i R_i$ est l'intersection de ces relations, et la borne supérieure de cette famille $\bigvee_i R_i$ est la relation d'équivalence $(R \cup R^{-1})^*$ engendrée par leur réunion $R = \bigcup_i R_i$. Si $\mathcal{F}$ est un opérateur monotone sur ce treillis (c'est à dire $R \subseteq R' \Rightarrow \mathcal{F}(R) \subseteq \mathcal{F}(R')$) alors par le théorème de Tarski il admet un plus grand point fixe $\nu(\mathcal{F})$ qui est aussi son plus grand post point fixe (un post point fixe de $\mathcal{F}$ –resp. un point fixe de $\mathcal{F}$– est une relation d'équivalence R telle que $R \subseteq \mathcal{F}(R)$ –resp. $R = \mathcal{F}(R)$–).

1. Montrer que la bisimilarité est le plus grand point fixe de l'opérateur $\mathcal{F}$ défini comme suit sur le treillis des relations d'équivalence sur l'ensemble X :
$$x\mathcal{F}(R)y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x \xrightarrow{a} x' & \Rightarrow & \exists y' \,.\, y \xrightarrow{a} y' \text{ et } x'Ry' \\ y \xrightarrow{a} y' & \Rightarrow & \exists x' \,.\, x \xrightarrow{a} x' \text{ et } x'Ry' \end{array} \right.$$

2. On définit la suite $(\equiv_n; n \in I\!N)$ des approximations de la relation de bisimilarité de la manière suivante. $\equiv_0$ désigne la relation universelle : $x \equiv_0 y$ pour tous x et y dans X; et on pose $\equiv_{n+1} = \mathcal{F}(\equiv_n)$ pour tout $n \in I\!N$. Montrer que la bisimilarité, notée $\equiv$, est l'intersection de ses approximations $\equiv_n$ si T est à branchement fini.

3. On veut montrer que la suite des approximations de la relation de bisimilarité peut être stricte. Pour cela on considère les termes donnés par la syntaxe suivante
$$t ::= 0 \mid t + t \mid a.t \quad (a \in A)$$
On pose $X = \mathbf{Sy}(A)$ l'ensemble des classes d'équivalence de ces termes pour la congruence définie par les équations
$$\begin{array}{rcl} t_1 + t_2 & = & t_2 + t_1 \\ t_1 + (t_2 + t_3) & = & (t_1 + t_2) + t_3 \\ t + 0 & = & t \\ t + t & = & t \end{array}$$
Un élément de $\mathbf{Sy}(A)$ est appelé un arbre de synchronisation sur l'alphabet A. On définit le système de transition $T \subseteq X \times A \times X$ pour lequel $x \xrightarrow{a} x'$ lorsqu'il existe un x'' tel que $x = a.x' + x''$. On définit les suites d'éléments x_n et y_n par $x_0 = b.0$, $y_0 = c.0$, et pour tout entier n, $x_{n+1} = a.(x_n + y_n)$ et $y_{n+1} = a.x_n + a.y_n$. Montrer que $x_n \equiv_n y_n$ et $x_n \not\equiv_{n+1} y_n$ pour tout entier n.

4 Logique de Hennessy et Milner

Pour les systèmes de transitions à branchement fini, la bisimilarité peut être caractérisée en terme des formules de la *logique de Hennessy et Milner* (HML) données par la syntaxe suivante

$$\varphi ::= 1 \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \exists_a \varphi$$

Si $T \subseteq X \times A \times X$ est un système de transition, la relation de validation d'une formule HML en un point $x \in X$ est donnée comme suit

$$\begin{array}{rcl} T, x \models 1 & & \text{toujours vraie} \\ T, x \models \neg\varphi & \textbf{ssi} & T, x \not\models \varphi \\ T, x \models \varphi \wedge \psi & \textbf{ssi} & T, x \models \varphi \text{ et } T, x \models \psi \\ T, x \models \exists_a \varphi & \textbf{ssi} & \exists y \;:\; (x \xrightarrow{a} y \;\wedge\; T, y \models \varphi) \end{array}$$

On utilise les abréviations $0 = \neg 1$ (pour “faux”), $\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ (pour la disjonction) et $\forall_a \varphi = \neg\exists_a \neg\varphi$ (pour l'opérateur modal universel)

1. Donner les relations de validation des formules 0, $\varphi \vee \psi$ et $\forall_a \varphi$.

2. Donner sans preuve une formule φ_n vérifiée en x_n mais pas en y_n, où x_n et y_n sont les arbres de synchronisations définis en 3.3.

3. On définit le rang d'une formule HML comme le nombre maximal d'imbrications d'opérateurs modaux, plus précisémment :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{rang}(1) & = & 0 \\ \mathbf{rang}(\varphi \wedge \psi) & = & \mathbf{max}(\mathbf{rang}(\varphi), \mathbf{rang}(\psi)) \\ \mathbf{rang}(\exists_a \varphi) & = & 1 + \mathbf{rang}(\varphi) \end{array}$$

   et on pose $\mathrm{HML}_k = \{\varphi \in \mathrm{HML} / \mathbf{rang}(\varphi) \leq k\}$ l'ensemble des formules de rang au plus k. Montrer que si T est à branchement fini

$$x \equiv_k y \;\; \textbf{ssi} \;\; \forall \varphi \in \mathrm{HML}_k \;\; (T, x \models \varphi \Leftrightarrow T, y \models \varphi)$$

   en particulier deux éléments sont bisimilaires si, et seulement si, ils vérifient les mêmes formules.