Corrigé de la question 1.1 – Par hypothèse, on peut écrire $u = u_1 a\bar{a}u_2 = u'_1 b\bar{b}u'_2$ avec $v = u_1u_2$, $v' = u'_1u'_2$ et $a, b \in A \cup \bar{A}$. Si $|u'_1| \leq |u_1| - 2$, alors $u_1 = u'_1 b\bar{b}w$ et $u'_2 = wa\bar{a}u_2$. Donc $v' = u'_1 wa\bar{a}u_2 \longrightarrow_g u'_1wu_2$, et $v = u'_1 b\bar{b}wu_2 \longrightarrow_g u'_1wu_2$, ce qu'il fallait démontrer. Le cas où $|u'_1| \geq |u_1| + 2$ est symétrique. Si $|u'_1| = |u_1| - 1$, alors $u_1 = u'_1 b$, $u'_2 = \bar{a}u_2$, $a = \bar{b}$ et $\bar{a} = b$. Donc $u_1u_2 = u'_1bu_2 = u'_1\bar{a}u_2 = u'_1u'_2$, ce qu'il fallait démontrer. Le cas $|u'_1| = |u_1| + 1$ est symétrique. Le dernier cas est celui où $|u'_1| = |u_1|$, mais alors $a = b$, $u_1 = u'_1$ et $u_2 = u'_2$: c'est le cas trivial.

Corrigé de la question 1.2 – Soit $u \in (A \cup \bar{A})^*$. Toute chaîne $u \longrightarrow_g u_1 \longrightarrow_g \cdots \longrightarrow_g u_n$ est

finie, car les u_i sont de longueur décroissante. Par conséquent, pour tout mot u, il existe un mot v réduit tel que $u \longrightarrow_g^* v$.

Soit $u \in (A \cup \bar{A})^*$. Supposons que $u \longrightarrow_g^* v$ et $u \longrightarrow_g^* v'$, où v et v' sont réduits. Montrons par récurrence sur $|u|$ que $v = v'$.

Si $|u| = 0$, l'affaire est triviale. Supposons le résultat acquis si $|u| \leq m$ et supposons que $n = m + 1$. Si la chaîne de u à v (resp. v') est de longueur nulle, alors u est réduit, et donc $u = v = v'$. Supposons qu'aucune de ces deux chaînes n'est triviale, et soit w (resp. w') le premier mot de la chaîne de u à v (resp. v') : on $u \longrightarrow_g w \longrightarrow_g^* v$ et $u \longrightarrow_g w' \longrightarrow_g^* v'$. De la question 1.1 on déduit qu'il existe un mot t tel que $w \longrightarrow_g^* t$ et $w' \longrightarrow_g^* t$. Soit s un mot réduit tel que $t \longrightarrow_g^* s$. Alors $w \longrightarrow_g^* v$ et $w \longrightarrow_g^* s$. Par hypothèse de récurrence, on a $v = s$. De la même façon, on a $s = v'$. Par conséquent, $v = v'$.

Corrigé de la question 1.3 – $\rho(a\bar{b}b^2\bar{a}\,\bar{b}ba\bar{b}a\bar{b}) = a^2\bar{b}$. $\rho(a)\rho(\bar{a}) = a\bar{a}$, mais $\rho(a\bar{a}) = 1$.

Corrigé de la question 1.4 – On vérifie d'abord que si $u \longrightarrow_g^* u'$, alors $uv \longrightarrow_g^* u'v$ et $vu \longrightarrow_g^* vu'$ pour tout mot v. Il s'ensuit que $uv \longrightarrow_g^* \rho(u)\rho(v) \longrightarrow_g^* \rho(\rho(u)\rho(v))$. Comme ce dernier mot est réduit, on déduit l'égalité requise de la question 1.2.

Corrigé de la question 2.1 – Supposons que $u \longrightarrow_g v$. Alors $u = u'a\bar{a}u''$ avec $a \in A \cup \bar{A}$ et $v = u'u''$. Si $p \cdot u$ est défini dans $\mathcal{A}$, alors $p \cdot u'$ et $p \cdot u'a = (p \cdot u') \cdot a$ sont définis dans $\mathcal{A}$. Par définition d'un automate inversif,

$p \cdot (u'a\bar{a})$ est défini et est égal à $p \cdot u'$. Il s'ensuit que $p \cdot (u'u'')$ est défini, et est égal à $p \cdot (u'a\bar{a}u'')$. On en déduit facilement le résultat demandé.

CORRIGÉ DE LA QUESTION 2.2 – Supposons que $\mathcal{A}$ satisfait la propriété énoncée dans la question. Soit $q \in Q$ tel que $q \neq i$ et soit u un mot réduit tel que $i \cdot u = q$. Soit a la dernière lettre de u. Posons $u_0 = u$ et $a_0 = a$. Supposons construite une suite de lettres $a_0, \ldots, a_n$ telle que $u_n = ua_1 \cdots a_n$ est réduit et $q_n = i \cdot u_n$ est défini dans $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est réduit, il existe une lettre $a_{n+1} \neq \bar{a}_n$ telle que $q_{n+1} = q_n \cdot a_{n+1}$ est défini dans $\mathcal{A}$. D'après le choix de a_{n+1}, le mot $u_{n+1} = ua_1 \cdots a_n a_{n+1}$ est réduit. Comme Q est fini, il existe $m < n$ tels que $q_m = q_n$. Choisissons m minimal pour cette propriété. Alors le mot $u_n\bar{u}_m$ est réduit. En effet, sinon, on a $a_n = a_m$, et alors $q_{m-1} = q_m \cdot \bar{a}_m = q_n \cdot \bar{a}_n = q_{n-1}$, contredisant le choix de m. Il est facile de voir que $i \cdot (u_n\bar{u}_m) = i$, et donc que $\mathcal{A}$ est réduit.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{A}$ est réduit, et considérons un état $q \neq i$. Comme l'automate est accessible, il existe un mot réduit u tel que $i \cdot u = q$. Il existe donc un mot v tel que $i \cdot (uv) = i$ et uv est réduit. Soit a la dernière lettre de u et soit b la première lettre de v. Comme uv est réduit, on a $b \neq \bar{a}$. Par définition d'un automate inversif, $q \cdot \bar{a}$ et $q \cdot b$ sont définis dans $\mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ satisfait la propriété requise.

CORRIGÉ DE LA QUESTION 2.3 – Soit i (resp. j) l'état initial de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$). Soit q un état de $\mathcal{A}$. Si $q = i$, alors la seule image possible de q est j. Sinon, il existe un mot u tel que $q = i \cdot u$. Alors la seule image possible de q dans $\mathcal{B}$ est $j \cdot u$ (si cet état est défini).

Si κ (resp. λ) est un morphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ (resp. de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$), alors $\lambda \circ \kappa$ est un morphisme de $\mathcal{A}$ dans lui-même. Mais l'identité est aussi un morphisme de $\mathcal{A}$ dans lui-même. Donc $\lambda \circ \kappa$ est l'identité sur $\mathcal{A}$. De même, $\kappa \circ \lambda$ est l'identité sur $\mathcal{B}$. Donc κ et λ sont des isomorphismes, réciproques l'un de l'autre.

CORRIGÉ DE LA QUESTION 3.1 – On se sert de la question 1.4 pour vérifier l'associativité : si $u, v, w \in F(A)$, on a

$$u \odot (v \odot w) = \rho(u\rho(vw)) = \rho(\rho(u)\rho(vw)) = \rho(uvw),$$

car $u = \rho(u)$, et dualement $(u \odot v) \odot w = \rho(uvw)$. Par ailleurs, il est immédiat que le mot vide est l'élément neutre, et que $u \odot \bar{u} = \bar{u} \odot u = 1$ (ce dernier point pourra être vérifié par une récurrence élémentaire sur la longueur de u).

Corrigé de la question 3.2 – Etendons d'abord β sur A en posant $\beta(\bar{a}) = \overline{\beta(a)}$ si $a \in A$. Ensuite on sait qu'on peut étendre β en un morphisme de monoïde sur $(A \cup \bar{A})^*$ (propriété élémentaire du monoïde libre). On pose alors, pour tout $u \in F(A)$, $\bar{\beta}(u) = \rho(\beta(u))$.

Si $u, v \in (A \cup \bar{A})^*$ et si $u \longrightarrow_g v$, disons $u = u'a\bar{a}u''$ et $v = u'u''$, alors

$$\rho(\beta(u)) = \rho(\beta(u')\beta(a)\overline{\beta(a)}\beta(u'')) = \rho(\beta(u')\beta(u'')) = \rho(\beta(u'u'')) = \rho(\beta(v)).$$

Donc si $u \leftrightarrow_G^* v$, alors $\rho(\beta(u)) = \rho(\beta(v))$ et $\rho(\beta(u)) = \rho(\beta(\rho(u)))$. Par conséquent, si $u, v \in F(A)$, on a

$$\begin{aligned}\bar{\beta}(u \odot v) &= \rho(\beta(\rho(uv))) = \rho(\beta(uv)) = \rho(\beta(u)\beta(v)) \\ &= \rho(\rho(\beta(u))\rho(\beta(v))) = \rho(\bar{\beta}(u)\bar{\beta}(v)),\end{aligned}$$

donc $\bar{\beta}(u \odot v) = \bar{\beta}(u) \odot \bar{\beta}(v)$, et $\bar{\beta}$ est un morphisme de groupes.

Pour démontrer l'unicité, considérons un morphisme γ de $F(A)$ dans G tel que $\gamma(a) = \beta(a)$ pour tout $a \in A$. Il est immédiat que γ et $\bar{\beta}$ coïncident sur les $\bar{a}$ ($a \in A$), donc sur tous les mots de longueur 1. Soit $u \in F(A)$ de longueur minimale tel que $\bar{\beta}(u) \neq \gamma(u)$. Alors u est de longueur au moins 2, et on a $u = va = v \odot a$ pour un certain $v \in F(A)$ et $a \in A$. Mais alors $\gamma(u) = \gamma(v)\gamma(a) = \bar{\beta}(v)\bar{\beta}(a) = \bar{\beta}(v \odot a) = \bar{\beta}(va) = \bar{\beta}(u)$, une contradiction.

Corrigé de la question 3.3 – La première assertion est une conséquence immédiate de la question 2.1.

Comme l'état initial est égal à l'état final, il est immédiat que $1 \in L(\mathcal{A})$ et que si $u, v \in L(\mathcal{A})$, alors $uv \in L(\mathcal{A})$. De plus, par définition d'un automate inversif, on a aussi $\bar{u} \in L(\mathcal{A})$. Donc, en utilisant encore la question 2.1, on vérifie que $\rho(L(\mathcal{A}))$ est un sous-groupe de $F(A)$.

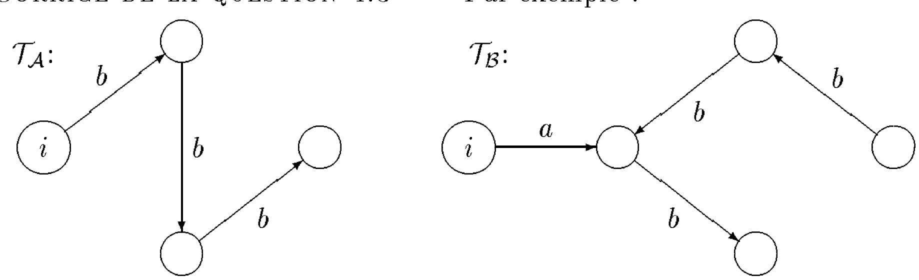
Corrigé de la question 3.4 – Soit $H = \mathcal{H}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}(\mathcal{B})$, et soit i (resp. j) l'état initial de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$). Soient u et v des mots réduits distincts tels que $i \cdot u = i \cdot v = q \neq i$ dans $\mathcal{A}$. On peut factoriser u et v en $u = u'w$ et $v = v'w$ de telle façon que $u'\bar{v}'$ soit réduit (en posant w égal au plus long suffixe commun de u et v). Mais alors $q \cdot \bar{w}$ est défini et on a $q \cdot \bar{w} = i \cdot u' = i \cdot v'$. Il s'ensuit que $i \cdot (u'\bar{v}') = i$ et donc que $\rho(u'\bar{v}') \in H$. Donc on a dans $\mathcal{B}$ $j \cdot (u'\bar{v}') = j$, et par conséquent $j \cdot u' = j \cdot v'$. Par ailleurs, comme $\mathcal{A}$ est réduit, il existe un mot x tel que ux est réduit et $i \cdot ux = i$. Donc $\rho(ux) \in H$ et dans $\mathcal{B}$, $j \cdot ux = j$. Mais alors $j \cdot u$ est défini dans $\mathcal{B}$. Or $j \cdot u = (j \cdot u') \cdot w = (j \cdot v') \cdot w$, donc $j \cdot v$ est défini dans $\mathcal{B}$ et $j \cdot u = j \cdot v$. Par conséquent, il existe un morphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. Par symétrie il en existe un autre de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ et on sait que cela entraîne l'isomorphie des deux automates (question 2.3).

Corrigé de la question 4.1 – Par définition d'un automate inversif, il existe un mot v tel que $\delta(i, v) = p$ et il existe un mot w tel que $\delta(i, w) = q$. Par conséquent $\delta(p, \bar{v}w) = q$, donc $\delta(p, \rho(\bar{v}w)) = q$ (question 2.1).

Si u et u' sont deux mots réduits tels que $\delta(p, u) = \delta(p, u') = q$, alors $\delta(p, u\bar{u}') = p$, et par définition d'un arbre, il s'ensuit que $\rho(u\bar{u}') = 1$. Mais alors $u = \rho(u\bar{u}'u') = \rho(\rho(u\bar{u}')u') = \rho(u') = u'$.

Corrigé de la question 4.2 – On procède par récurrence sur Card(Q). Le résultat est trivial si Card$(Q) = 1$. Supposons maintenant que Card$(Q) \geq 2$. Par définition, $\mathcal{T}$ n'est pas réduit et, d'après la question 2.2, il existe un état $q \neq i$ tel qu'il existe une unique lettre $a \in A \cup \bar{A}$ pour laquelle $\delta(q, a)$ est défini. Soit $\mathcal{T}'$ l'automate obtenu en retirant de $\mathcal{T}$ l'état q et les transitions qui s'y rapportent ($q \xrightarrow{a} \delta(q, a)$ et $\delta(q, a) \xrightarrow{\bar{a}} q$). On vérifie que les états de $\mathcal{T}'$ sont toujours accessibles et que $\mathcal{T}'$ est un arbre. On conclut par récurrence.

Corrigé de la question 4.3 – Par exemple :



Corrigé de la question 4.4 – On part du sous-arbre de $\mathcal{A}$ constitué du seul état i. Tant que le sous-arbre construit n'est pas couvrant, on peut considérer un état q hors du sous-arbre. Puisque q est accessible, il existe un mot $u \in (A \cup \bar{A})^*$ tel que $\delta(i, u) = q$. Comme $q \neq i$, on peut supposer que $u = a_1 \cdots a_n$ avec $n \geq 1$. Soit $h \geq 0$ maximal tel que $\varepsilon(i, a_1 \cdots a_k)$ est défini pour tout $k \leq h$. Alors $h < n$. Posons $p = \delta(i, a_1 \cdots a_h)$. Il suffit d'ajouter au sous-arbre l'état $q' = \delta(i, a_1 \cdots a_{h+1})$, et lest transitions $p \xrightarrow{a_{h+1}} q$ et $q \xrightarrow{\bar{a}_{h+1}} p$. La vérification que l'automate ainsi construit est un arbre est immédiate. Par finitude, l'algorithme se termine au bout de Card$(Q) - 1$ étapes.

L'algorithme peut être présenté de bien des façons, naturellement, par exemple en invoquant une exploration de $\mathcal{A}$ en profondeur

Corrigé de la question 5.1 – Comme t_q et $t_{\delta(q,a)}$ sont réduits, si $h_{q,a}$ n'est pas réduit, c'est que $t_q = t'\bar{a}$ ou $t_{\delta(q,a)} = t'a$. Dans le premier cas, $p = \varepsilon(i, t')$ est défini, et $q \xrightarrow{a} p$ est une transition de $\mathcal{T}$, ce qui contredit la définition de B. Le second cas est traité de la même façon.

Montrons maintenant que tout élément u de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ est produit dans $F(A)$ d'éléments de la forme $h_{q,a}$ et de $\bar{h}_{q,a}$ ($(q,a) \in E$). Le mot u est réduit et étiquette un chemin dans $\mathcal{A}$ de i à i. En isolant les portions de ce chemin qui se situent dans $\mathcal{T}$, on obtient une factorisation $u = u_0 a_1 u_1 \cdots a_n u_n$ où les a_i sont dans $A \cup \bar{A}$ et les u_i sont dans $F(A)$ et telle que, si $q_i = i \cdot u_0 a_1 \cdots a_{i-1} u_i$, la paire (q_i, a_i) est dans E et le chemin $q_i \cdot a_i \xrightarrow{u_{i+1}} q_{i+1}$ est entièrement dans $\mathcal{T}$.

Comme on a aussi $q_i \cdot a_i \xrightarrow{t^{-1}_{q_i \cdot a_i} t_{q_{i+1}}} q_{i+1}$ et ce chemin est entièrement dans $\mathcal{T}$, on déduit de la définition des arbres que $u_{i+1} = \rho(u_{i+1}) = \rho(t^{-1}_{q_i \cdot a_i} t_{q_{i+1}})$. De même, $u_0 = t_{q_0}$ et $u_n = t^{-1}_{q_n \cdot a_n}$. D'où l'on déduit que $u = \rho(h_{q_1,a_1} \ldots h_{q_n,a_n}) = h_{q_1,a_1} \odot \ldots \odot h_{q_n,a_n}$.

Corrigé de la question 5.2 – La surjectivité a été démontrée à la question précédente.

On montre que si $\beta(x) = \beta(y)$, alors $u = v$. On se ramène promptement à montrer que si $\beta(x) = 1$, alors $x = 1$. Soit donc $x \in F(B)$ tel que $x \neq 1$. Alors il existe une suite finie $b_1 = (q_1, a_1), \ldots, b_r = (q_r, a_r)$ d'éléments de B et des entiers $e_1, \ldots, e_r$ dans $\{-1, +1\}$ tels que $x = b_1^{e_1} \cdots b_r^{e_r}$ (si l'on veut bien noter b^{-1} pour $\bar{b}$). Alors (notant aussi u^{-1} pour $\bar{u}$ dans $(A \cup \bar{A})^*$) on a $\beta(x) = \rho(w)$, où w est le mot $w = h^{e_1}_{q_1,a_1} \cdots h^{e_r}_{q_r,a_r} \in (A \cup \bar{A})^*$.

Les mots t_q sont tous réduits. Si $e_i = e_{i+1} = 1$, alors $\rho(\bar{t}_{\delta(q_i,a_i)} t_{q_{i+1}})$ est l'unique mot réduit t tel que $\varepsilon(\delta(q_i, a_i), t) = q_{i+1}$. Comme la transition $q_i \xrightarrow{a_i} \delta(q_i, a_i)$ n'est pas dans $\mathcal{T}$, les mots $a_i t$ et $t a_{i+1}$ sont réduits. Comme $a_i, a_{i+1} \in A$, le mot $a_i t a_{i+1}$ est réduit.

Si $e_i = 1$ et $e_{i+1} = -1$, alors $\rho(\bar{t}_{\delta(q_i,a_i)} t_{\delta(q_{i+1},a_{i+1})})$ est l'unique mot réduit t tel que $\varepsilon(\delta(q_i, a_i), t) = \delta(q_{i+1}, a_{i+1})$. Comme ci-dessus, les mots $a_i t$ et $t\bar{a}_{i+1}$ sont réduits. Si $t = 1$, alors $\delta(q_i, a_i) = \delta(q_{i+1}, a_{i+1})$, et comme le mot $b_1^{e_1} \cdots b_r^{e_r}$ est réduit, on en déduit que $q_i \neq q_{i+1}$ ou $a_i \neq a_{i+1}$. Le premier cas entraîne aussi $a_i \neq a_{i+1}$. (On a $\delta(\delta(q_i, a_i), \bar{a}_i) = q_i$ et $\delta(\delta(q_{i+1}, a_{i+1}), \bar{a}_{i+1}) = q_{i+1}$, et on suppose que $\delta(q_i, a_i) = \delta(q_{i+1}, a_{i+1})$.) Donc le mot $a_i t \bar{a}_{i+1}$ est réduit dans toutes les circonstances.

Les autres cas, où $e_i = -1$ et $e_{i+1} = 1$, ou bien $e_i = e_{i+1} = -1$, sont traités de manière duale. Il s'ensuit que $\rho(w)$ est de longueur au moins r, et donc que $\beta(x) = \rho(w) \neq 1$, ce qui conclut la preuve.

Corrigé de la question 5.3 – La question 5.2 montre que $\beta(E)$ est une base de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$, donc le rang de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ est $\text{Card}(E)$. La question 4.2 montre que $\text{Card}(D) - \text{Card}(E) = \text{Card}(Q) - 1$, d'où le résultat.

CORRIGÉ DE LA QUESTION 5.4 – Pour $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ il vient ab^{-2} et bab^{-3}. Pour $\mathcal{H}(\mathcal{B})$, il vient $abab^2a^{-1}$ et $ab^{-1}ab^{-1}a^{-1}$.

CORRIGÉ DE LA QUESTION 6.1 – À chaque étape, le nombre d'états de $\mathcal{A}_n$ diminue. On est donc certain que la construction s'arrêtera après au plus $\text{Card}(Q_1)$ étapes.

CORRIGÉ DE LA QUESTION 6.2 – Pour le sous-groupe considéré, le dernier $\mathcal{A}_n$ constructible est l'automate $\mathcal{A}$ de la figure 1.

CORRIGÉ DE LA QUESTION 6.3 – Si $h_i = a \in A \cup \bar{A}$, soit $\mathcal{B}_i$ l'automate formé de l'état 1 et des transitions $(1, a, 1)$ et $(1, \bar{a}, 1)$. Si $|h_i| \geq 2$, soit $\mathcal{B}_i$ l'automate formé de l'état 1, des états de la forme (i, u), et des transitions de la forme $(1, a, (i, u))$, $((i, u), a, (i, v))$ et $((i, u), a, 1)$. Il est facile de voir que tout chemin de 1 à 1 dans $\mathcal{A}_1$ se décompose en une concaténation de chemins de 1 à 1 dans des $\mathcal{B}_i$. Or si u étiquette un chemin de 1 à 1 dans $\mathcal{B}_i$, alors il existe un mot $v \in \{h_i, \bar{h}_i\}^*$ tel que $u \longrightarrow_G^* v$. Il s'ensuit que si u est accepté par $\mathcal{A}_1$, alors il existe un mot $v \in \{h_1, \bar{h}_1, \ldots, h_r, \bar{h}_r\}^*$ tel que $u \longrightarrow_g^* v$, et donc $\rho(L(\mathcal{A}_1)) \subseteq H$. L'inclusion réciproque est immédiate puisque $L(\mathcal{A}_1)$ est un sous-monoïde de $(A \cup \bar{A})^*$ et les h_i et $\bar{h}_i$ sont trivialement acceptés par $\mathcal{A}_1$.

CORRIGÉ DE LA QUESTION 6.4 – Considérons d'abord un mot u accepté par $\mathcal{A}_n$. On distingue dans un chemin de 1 à 1 d'étiquette u les passages par les transitions étiquetées a ou $\bar{a}$ entre p et r, et entre q et r, pour vérifier que u est aussi accepté par $\mathcal{A}_{n+1}$.

Pour la réciproque, on montre que si $\mathcal{A}_{n+1}$ est défini et si $v \in L(\mathcal{A}_{n+1})$, alors il existe $u \in L(\mathcal{A}_n)$ tel que $u \longrightarrow_g^* v$, par récurrence sur le nombre d de passages du chemin dans $\mathcal{A}_{n+1}$ de i à i étiqueté v. Si $d = 0$, alors v est aussi accepté par $\mathcal{A}_n$. Supposons le résultat acquis pour $d \geq k$, et considérons v tel que $d = k + 1$. Alors v peut se factoriser en $v = v'v''$ avec $i \cdot v' = p$ dans $\mathcal{A}_{n+1}$. Soit x un mot réduit étiquetant un chemin de p à i dans $\mathcal{A}_{n+1}$ et ne passant pas par p (donc x étiquette un chemin de p à i dans $\mathcal{A}_n$ aussi). Par hypothèse de récurrence, il existe des mots $u', u'' \in L(\mathcal{A}_n)$ tels que $u' \longrightarrow_g^* v'x$ et $u'' \longrightarrow_g^* \bar{x}v''$. Mais alors $u = u'u'' \longrightarrow_g^* v'x\bar{x}v'' \longrightarrow_g v'v'' = v$. Comme dans $\mathcal{A}_n$ l'état initial est aussi l'état final, on a encore $u'u'' \in L(\mathcal{A}_n)$, ce qui conclut la preuve.

Corrigé de la question 6.5 – La condition selon laquelle $\mathcal{A}_{n+1}$ n'est pas défini est équivalente à la condition que $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_n$ est inversif.

Corrigé de la question 6.6 – La raison de la terminaison est encore une fois la décroissance stricte du nombre des états des $\mathcal{B}_n$. Que le dernier automate construit soit réduit est une conséquence immédiate de la définition des $\mathcal{B}_n$. Enfin, il est facile de voir que chaque $\mathcal{B}_n$ est inversif.

Corrigé de la question 6.7 – C'est encore l'automate $\mathcal{A}$ de la figure 1, puisque ce dernier est réduit.

Corrigé de la question 6.8 – Quels que soient les choix effectués, on aboutit à un automate inversif réduit $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{H}(\mathcal{C}) = H$. On utilise alors la question 3.4 pour conclure.