Question 1

Depuis chaque nœud interne de l'arbre, c'est soit à J_1, soit à J_2 de jouer; on notera N_1 et N_2 les ensembles correspondants de nœuds.

On notera $\overline{j}$ l'inverse du numéro du joueur de numéro j (1 pour le joueur 2, 2 pour le joueur 1).

La stratégie du joueur gagnant j peut être représentée par un sous-arbre de l'arbre $\mathcal{G}$, dont toutes les feuilles sont dans F_j, et dans lequel tout nœud de N_j a un et un seul fils, alors que les nœuds de $N_{\overline{j}}$ ont les mêmes fils que dans $\mathcal{G}$.

L'algorithme proposé retourne le numéro du joueur gagnant, et construit la stratégie gagnante en élaguant l'arbre de départ; on notera `élaguer(s,s')` la procédure consistant à enlever de l'arbre tous les sous-arbres de racine s'', où s'' est un fils de s distinct de s'.

```
fonction gagnant(sommet s, joueur j):
    si s est une feuille alors
        retourner 1 si s ∈ F1, 2 si s ∈ F2
    sinon
        pour tout fils s' de s faire
            si gagnant(s', j̄) = j alors
                élaguer(s,s');
                retourner j
            fin si
        fin pour;
        retourner j̄
    fin si
```

L'appel `gagnant(racine,1)` retourne le numéro du joueur gagnant, et construit la stratégie de ce joueur.

Question 2

Le nombre des parties possibles est fini; à chaque sommet s et à chaque joueur j on associe la valuation $v_j(s)$ correspondant au meilleur résultat (différence entre ses propres gains et ceux de son adversaire) qu'il peut espérer pour le reste de la partie si c'est à lui de jouer, alors que le pion est en s:

$$v_j(s) = \begin{cases} 0 \text{ si } s \text{ est une feuille} \\ \max\{n(s') - v_{\overline{j}}(s') \ / \ s \longrightarrow s' \text{ est un arc de } \mathcal{G}\} \text{ sinon} \end{cases}$$

Un parcours en profondeur du graphe permet de calculer en temps linéaire les valuations $v_1(s)$ et $v_2(s)$ de chaque sommet s; les sommets depuis lesquels J_1 a une stratégie gagnante sont les sommets pour lesquels $v_1(s)$ est strictement positif.

Question 3

On pose

$$f(X) = F_1 \cup p(F_2 \cup q(X))$$

La fonction f est évidemment croissante pour l'inclusion.

$f(\varphi(F)) \subset \varphi(F)$: en effet

- tout sommet s de F_1 est dans $\varphi(F)$ (si le pion est en s, quoi que joue J_1, il a gagné la partie)

- tout sommet s qui a un successeur $s' \in F_2 \cup q(\varphi(F))$ est dans $\varphi(F)$: en effet, si le pion est en s, J_1 joue en s'; si s' est dans F_2, la partie est gagnée; sinon, $s' \in q(\varphi(F))$, donc la partie continue, mais, quoi que joue J_2, J_1 aura une stratégie gagnante depuis le sommet atteint.

Réciproquement, $\varphi(F) \subset f(\varphi(F))$: en effet, soit $s \in \varphi(F)$:

- ou bien s est un sommet de F_1;
- ou bien la stratégie gagnante de J_1 consiste à jouer en un successeur s' de s qui, s'il n'est pas dans F_2, a lui-même des successeurs (sinon, la partie serait perdue pour J_1) et depuis lequel, quoi que joue J_2, J_1 a la possibilité de gagner; par conséquent $s' \in F_2 \cup q(\varphi(F))$.

Par conséquent $\varphi(F)$ est un point fixe de f.

Soit X un point fixe de f. Alors J_2 a une stratégie gagnante depuis tout sommet du complémentaire de X dans S_1, stratégie que l'on définit inductivement: supposons que le pion ne soit passé par aucun sommet de F, et se trouve sur un sommet $s \in S_1 - X$:

- s n'est pas dans F_1; donc, si s n'a pas de successeurs, J_2 gagne la partie;
- sinon, supposons que J_1 joue en un successeur s' de s: alors s' n'est pas dans F_2; donc, si s' n'a pas de successeurs, J_2 gagne la partie; sinon, s' n'est pas dans $q(X)$, donc a au moins un successeur s'' qui n'est pas dans X; la stratégie de J_2 consiste alors à jouer en s'', et on est ramené au cas précédent (le pion n'est passé par aucun sommet de F, et se trouve dans un sommet de $S_1 - X$).

On en déduit que, si un sommet s n'est pas dans X, J_1 ne peut avoir de stratégie gagnante depuis s; par conséquent $\varphi(F) \subset X$.

$\varphi(F)$ est donc le plus petit point fixe de f.

D'après le théorème du point fixe

$$\varphi(F) = \bigcup_{n>0} f^n(\emptyset)$$

La suite des $f^n(\emptyset)$ est croissante pour l'inclusion, elle est donc stationnaire (puisque S_1 est fini); plus précisément, si n est le nombre d'éléments de S_1, alors $f^n(\emptyset) = f^{n+1}(\emptyset)$ et $\varphi(F) = f^n(\emptyset)$.

Etant donné un ensemble $X \subset S_1$, on peut facilement calculer $f(X)$ en temps linéaire par rapport à la taille du graphe (il suffit de parcourir le graphe en marquant les sommets de F et les sommets dont tous les successeurs sont dans X). En répétant n fois l'opération à partir de l'ensemble vide, on calcule $\varphi(F)$ en temps quadratique.

Question 4

Pour calculer $\varphi(F)$, on associe à tout sommet s de S_2 un compteur qu'on initialise au nombre de ses successeurs; puis on parcourt le graphe en effectuant, pour chaque sommet visité s, l'action

```
si s ∈ F1 alors marquer-1(s)
sinon
    si s ∈ F2 alors marquer-2(s)
    fin si
fin si
```

où les procédures de marquage sont les suivantes:

```
marquer-1(sommet s):
    si s n'est pas marqué alors
        marquer s;
        pour tout prédécesseur s' de s faire
            décrémenter compteur(s');
            si compteur(s')=0 alors marquer-2(s')
            fin si
        fin pour
    fin si

marquer-2(sommet s):
    si s n'est pas marqué alors
        marquer s;
        pour tout prédécesseur s' de s faire
            marquer-1(s')
        fin pour
    fin si
```

L'algorithme est linéaire (chaque sommet est marqué au plus une fois, et le nombre d'appels récursifs des procédures de marquage est au plus égal au nombre d'arcs).

Notons X_1 (respectivement: X_2) l'ensemble des sommets marqués de S_1 (resp. S_2); au début de l'algorithme, ces ensembles sont vides.

Il est facile de montrer que toutes les instructions préservent les propriétés $X_1 \subset F_1 \cup p(X_2)$ et $X_2 \subset F_2 \cup q(X_1)$: par conséquent, à toute étape de l'algorithme, $X_1 \subset f(X_1)$.

A la fin de l'algorithme, $F_1 \cup p(X_2) \subset X_1$ et $F_2 \cup q(X_1) \subset X_2$: en effet, les sommets de F_1 et F_2 ont été visités, donc marqués; les sommets de X_2 ont été visités, donc marqués, donc leurs prédécesseurs ont été marqués; et les sommets de $q(X_1)$ ont été marqués (lorsque l'on a marqué leur dernier successeur non marqué). Par conséquent, à la fin de l'algorithme, $f(X_1) \subset X_1$; en définitive, à la fin de l'algorithme, X_1 est un point fixe de f.

D'autre part, lorsqu'on marque un sommet s de S_1, on a $s \in F_1 \cup p(X_2)$, donc $s \in f(X_1)$: par conséquent, si l'inclusion $X_1 \subset \varphi(F)$ est vraie avant ce marquage, elle est vraie après (puisque $f(X_1) \subset f(\varphi(F)) = \varphi(F)$). Par récurrence, l'inclusion est vraie à la fin de l'algorithme, donc X_1 est bien le plus petit point fixe de f.

Question 5

Soit $\psi(F)$ l'ensemble des sommets du graphe depuis lesquels J_1 a une stratégie gagnante.

On pose

$$g(X) = \varphi((F_1 \cap X) \cup (F_2 \cap q(X))$$

$\psi(F) = g(\psi(F))$: en effet, les stratégies gagnantes pour J_1 sont les stratégies lui permettant d'atteindre un sommet de F depuis lequel il pourra gagner la partie, c'est-à-dire soit un sommet de $F_1 \cap \psi(F)$, soit un sommet de $F_2 \cap q(\psi(F)))$.

Soit X un point fixe de g. Depuis tout sommet de X, J_1 a une stratégie gagnante: il lui suffit d'appliquer indéfiniment la stratégie consistant à atteindre un sommet s de $(F_1 \cap X) \cup (F_2 \cap q(X))$. Donc $X \subset \psi(F)$.

Par conséquent $\psi(F)$ est le plus grand point fixe de g.

D'après le théorème du point fixe

$$\psi(F) = \bigcap_{n>0} g^n(S_1)$$

ce qui donne un algorithme quadratique de calcul: en effet, pour un ensemble X donné, on peut calculer

$$Y = (F_1 \cap X) \cup (F_2 \cap q(X))$$

en temps linéaire, puis $\varphi(Y)$, c'est-à-dire $g(X)$, en temps linéaire; il suffit d'itérer le calcul à partir de l'ensemble S_1 (comme on l'a montré plus haut, le nombre d'itérations est au plus le nombre d'éléments de S_1).

Question 6

Soit $\mathcal{A}$ un automate déterministe complet reconnaissant le langage L; on note i son état initial.

A partir de cet automate, on construit inductivement un graphe biparti $\mathcal{G}$ de la façon suivante:

- on dédouble chaque état s de $\mathcal{A}$ en deux sommets s^1 et s^2 de $\mathcal{G}$;
- on dédouble chaque transition $s \xrightarrow{a} s'$ de $\mathcal{A}$, en deux arcs $s^1 \longrightarrow s'^2$ et $s'^1 \longrightarrow s^2$ de $\mathcal{G}$.

On note F l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$ de la forme s^1 ou s^2, où s est un état final de l'automate.

Une partie est un mot $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, auquel correspond un unique comportement $i \longrightarrow s_2 \longrightarrow \ldots s_n \longrightarrow \ldots$ de l'automate $\mathcal{A}$; on lui associe la partie

$$i^1 \longrightarrow s_2^2 \ldots \longrightarrow s_{2p+1}^1 \longrightarrow s_{2p+2}^2 \ldots \longrightarrow \ldots$$

jouée dans le graphe $\mathcal{G}$; J_1 gagne si et seulement si cette partie passe par un sommet de F.

Dire que J_1 a une stratégie gagnante, c'est dire que, dans le graphe $\mathcal{G}$, J_1 a depuis i_1 une stratégie pour atteindre F; pour savoir si J_1 a une stratégie gagnante, il suffit donc de calculer $\varphi(F)$ (comme défini dans le jeu à positions gagnantes terminales), puis de déterminer si $i_1 \in \varphi(F)$; ce qui se fait en temps linéaire par rapport à la taille de $\mathcal{G}$, donc de l'automate $\mathcal{A}$.

Question 7

On définit une configuration du jeu comme un triplet (s, X_1, X_2) où s est un sommet du graphe, X_1 et X_2 sont des ensembles disjoints de sommets du graphe.

On construit inductivement le graphe biparti $\mathcal{G}'$ des configurations possibles de la façon suivante:

- $c_0 = (s_0, \emptyset, \emptyset)$ est un sommet de S_1;

- pour tout sommet $c = (s, X_1, X_2)$ de S_1 et tout arc $s \longrightarrow s'$ de $\mathcal{G}$, $c' = (s', X_1', X_2)$, où $X_1' = X_1$ si $s' \in X_2$ et $X_1' = X_1 \cup \{s'\}$ sinon, est un sommet de S_2, et $c \longrightarrow c'$ est un arc de $\mathcal{G}'$;
- pour tout sommet $c = (s, X_1, X_2)$ de S_2 et tout arc $s \longrightarrow s'$ de $\mathcal{G}$, $c' = (s', X_1, X_2')$, où $X_2' = X_2$ si $s' \in X_1$ et $X_2' = X_2 \cup \{s'\}$ sinon, est un sommet de S_1, et $c \longrightarrow c'$ est un arc de $\mathcal{G}'$.

Le graphe $\mathcal{G}'$ est fini (en effet, il n'existe qu'un nombre fini de configurations possibles); à toute partie dans $\mathcal{G}$ correspond un unique chemin de $\mathcal{G}'$ débutant en c_0.

A toute configuration $c = (s, X_1, X_2)$ on associe la valuation

$$\delta(c) = \sum_{x \in X_1} n(x) - \sum_{x \in X_2} n(x)$$

Le long d'un chemin de $\mathcal{G}'$, les ensembles X_1 et X_2 (composantes des configurations) ne peuvent que croître; par conséquent, dans toute composante fortement connexe de $\mathcal{G}'$, ils sont constants, et a fortiori tous les sommets ont même valuation (ce qui correspond au fait que dans toute partie infinie du jeu, à partir d'un certain rang, ni J_1 ni J_2 ne ramassent de jetons).

Soit F l'ensemble des configurations c pour lesquelles $\delta(c) > 0$: les parties gagnantes pour J_1 correspondent aux chemins de $\mathcal{G}'$ dont tous les sommets sont dans F à partir d'un certain rang; ce qui équivaut à dire que le chemin doit passer infiniment souvent par F (en effet, si un chemin passe infiniment souvent par un sommet c de F, à partir d'un certain rang tous ses sommets sont dans la composante fortement connexe de c, et par conséquent tous sont dans F).

On est ainsi ramené au cas d'un jeu à positions gagnantes répétées dans un graphe biparti; pour savoir si J_1 a une stratégie gagnante, il suffit donc de déterminer si c_0 est élément de $\psi(F)$.