Graphes orientés eulériens

On rappelle qu'un graphe orienté G est la donnée d'un quadruplet $(V, E, \partial_0, \partial_1)$ d'un ensemble fini V dit de *sommets*, d'un ensemble fini E dit d'*arcs*, et de deux fonctions $\partial_0, \partial_1 : E \to V$. Si e est un arc, $\partial_0 e$ est la *source* de e, et $\partial_1 e$ est son *but* ; on dit aussi que e *va de* $\partial_0 e$ à $\partial_1 e$.

Un *chemin* π dans G est une suite alternée $v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_{n-1} e_{n-1} v_n e_n v_{n+1}$ de sommets v_1, ..., v_{n+1} et d'arcs e_1, ..., e_n tels que $\partial_0 e_i = v_i$ et $\partial_1 e_i = v_{i+1}$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$. La *longueur* d'un tel chemin est son nombre d'arcs, soit n. On dit que π *va de* v_1 à v_{n+1}, et l'on étend les notations ∂_0 et ∂_1 en posant $\partial_0 \pi = v_1$, $\partial_1 \pi = v_{n+1}$.

Un chemin π est un *circuit* si et seulement si $\partial_0 \pi = \partial_1 \pi$.

Pour chaque chemin π dans G, et chaque arc e dans G, soit $|\pi|_e$ le nombre de fois où π passe par e. Formellement, si $\pi = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_{n-1} e_{n-1} v_n e_n v_{n+1}$, alors $|\pi|_e$ est le nombre d'indices i, $1 \leq i \leq n$, tels que $e_i = e$.

Pour chaque chemin π dans G, et chaque sommet v dans G, notons $in_v(\pi)$ le nombre de fois où π arrive au sommet v et $ex_v(\pi)$ le nombre de fois où π part de v. Formellement, si $\pi = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_{n-1} e_{n-1} v_n e_n v_{n+1}$, alors $in_v(\pi)$ est le nombre d'indices i, $1 \leq i \leq n$, tels que $v = v_{i+1}$, et $ex_v(\pi)$ est le nombre d'indices i, $1 \leq i \leq n$, tels que $v = v_i$.

1. Montrer que si π est un circuit, alors pour tout sommet v de G, $in_v(\pi) = ex_v(\pi)$.
2. On rappelle que le *degré entrant* in_v d'un sommet v dans G est le nombre d'arcs e tels que $\partial_1 e = v$; le *degré sortant* ex_v de v est le nombre d'arcs e tels que $\partial_0 e = v$.

   Un circuit π de G est dit *eulérien* si et seulement si π passe par tout arc de G exactement une fois, autrement dit si $|\pi|_e = 1$ pour tout e.

   Montrer que si G a un circuit eulérien, alors G vérifie la *loi de Kirchoff* : $in_v = out_v$ pour tout sommet v de G.
3. On rappelle qu'un graphe orienté G est *fortement connexe* si et seulement si, pour tous sommets v, v' de G, il existe un chemin de v à v'.

   Un *sommet isolé* de G est un sommet de degré entrant et de degré sortant nuls.

   Montrer que si G a un circuit eulérien, et si G n'a pas de sommet isolé, alors G est fortement connexe.
4. On considère un chemin π tel que $|\pi|_e \leq 1$ pour tout arc e de G, et maximal avec cette propriété. Montrer que si G vérifie la loi de Kirchoff, alors π est un circuit.
5. Si de plus $|\pi|_e = 0$ pour un arc e, et si G est fortement connexe, montrer qu'il existe un sommet v par lequel passe π, et un circuit π' de v à v passant par e, et qui ne passe que par des arcs par lesquels π ne passe pas.

   En déduire que π est eulérien. On aura donc montré qu'un graphe fortement connexe vérifiant la loi de Kirchoff a un circuit eulérien.
6. Décrire un algorithme efficace prenant en entrée en un graphe fortement connexe G, et retournant NON s'il n'a pas de circuit eulérien, et retournant un circuit eulérien de G sinon.
7. Comment peut-on tester si G est fortement connexe en temps polynomial ?