Graphes non orientés eulériens

On rappelle qu'un graphe (non orienté) G est la donnée d'un couple (V, E) d'un ensemble fini V dit de *sommets*, et d'un ensemble fini E de paires $\{v_0, v_1\}$ de sommets ($v_0 \neq v_1$). Les éléments de E sont appelés les *arêtes*.

Un *chemin* π dans G est une suite alternée $v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_{n-1} e_{n-1} v_n e_n v_{n+1}$ de sommets v_1, …, v_{n+1} et d'arêtes e_1, …, e_n tels que $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$. La *longueur* d'un tel chemin est son nombre d'arêtes, soit n. On dit que π *va de* v_1 à v_{n+1}.

Un chemin π est un *cycle* s'il va d'un sommet v au même sommet v.

Pour chaque chemin π dans G, et chaque arête e dans G, soit $|\pi|_e$ le nombre de fois où π passe par e. Formellement, si $\pi = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_{n-1} e_{n-1} v_n e_n v_{n+1}$, alors $|\pi|_e$ est le nombre d'indices i, $1 \leq i \leq n$, tels que $e_i = e$.

Pour chaque chemin π dans G, et chaque sommet v dans G, notons $in_v(\pi)$ le nombre de fois où π arrive au sommet v et $ex_v(\pi)$ le nombre de fois où π part de v. Formellement, si $\pi = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_{n-1} e_{n-1} v_n e_n v_{n+1}$, alors $in_v(\pi)$ est le nombre d'indices i, $1 \leq i \leq n$, tels que $v = v_{i+1}$, et $ex_v(\pi)$ est le nombre d'indices i, $1 \leq i \leq n$, tels que $v = v_i$.

1. Montrer que si π est un cycle, alors pour tout sommet v de G, $in_v(\pi) = ex_v(\pi)$.
2. On rappelle que le *degré* deg_v d'un sommet v dans G est le nombre d'arêtes e telles que $v \in e$.

   Un cycle π de G est dit *eulérien* si et seulement si π passe par tout arête de G exactement une fois, autrement dit si $|\pi|_e = 1$ pour tout e.

   Montrer que si G a un cycle eulérien, alors G vérifie la *loi de Kirchoff* : deg_v est pair pour tout sommet v de G.
3. On rappelle qu'un graphe G est *connexe* si et seulement si, pour tous sommets v, v' de G, il existe un chemin de v à v'.

   Un *sommet isolé* de G est un sommet de degré nul.

   Montrer que si G a un cycle eulérien, et si G n'a pas de sommet isolé, alors G est connexe.
4. On considère un chemin π tel que $|\pi|_e \leq 1$ pour tout arête e de G, et maximal avec cette propriété. Montrer que si G vérifie la loi de Kirchoff, alors π est un cycle.
5. Si de plus $|\pi|_e = 0$ pour une arête e, et si G est connexe, montrer qu'il existe un sommet v par lequel passe π, et un cycle π' de v à v passant par e, et qui ne passe que par des arêtes par lesquels π ne passe pas.

   En déduire que π est eulérien. On aura donc montré qu'un graphe connexe vérifiant la loi de Kirchoff a un cycle eulérien.
6. Décrire un algorithme efficace prenant en entrée en un graphe connexe G, et retournant NON s'il n'a pas de cycle eulérien, et retournant un cycle eulérien de G sinon.
7. Comment peut-on tester si G est connexe en temps polynomial ?