

Décision de systèmes d'inéquations simples

On considère des inéquations de la forme (1) $x \leq y + c$, où x et y sont des inconnues, ou *variables*, et c est une constante dans \mathbb{Z} . Un *système* S d'inéquations est un ensemble fini d'inéquations, vu comme une conjonction : une *solution* de S est une collection de valeurs réelles, une pour chaque inconnue, qui rend vrai chacune des inéquations de S .

1. À chaque système d'inéquations S on associe un graphe orienté étiqueté $G(S)$ comme suit. Les sommets de $G(S)$ sont les inconnues apparaissant dans S , et il y a un arc de x vers y étiqueté par l'entier c si et seulement s'il existe une inéquation $x \leq y + c$ dans S .

Le *poids* d'un chemin est la somme des étiquettes des arcs de ce chemin. On rappelle qu'un *circuit* est un chemin d'un sommet vers lui-même. Un chemin est *simple* si et seulement si aucun sommet, sauf celui de départ, n'apparaît deux fois dans le circuit.

Montrer que si S a une solution, $G(S)$ n'a pas de circuit de poids strictement négatif.

2. Supposons que $G(S)$ n'a pas de circuit de poids strictement négatif. Supposons de plus que $G(S)$ a une *racine* x_r , c'est-à-dire un sommet x_r depuis lequel tous les sommets sont accessibles. Montrer que pour tout sommet x dans $G(S)$, il existe un chemin de x_r vers x de poids minimum. Soit n_x ce poids minimum: montrer que la collection des valeurs $-n_x$ pour chaque sommet x est une solution de S .

3. En déduire que S a une solution ssi $G(S)$ n'a pas de circuit de poids strictement négatif. Lorsque $G(S)$ n'a pas de racine, on se ramènera au cas où $G(S)$ a une racine.

4. Soient x_1, \dots, x_n les variables de S . On construit la matrice $M(S) = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ en posant $m_{ij} =$ le plus petit poids d'un arc allant de x_i à x_j , ou $+\infty$ s'il n'y en a pas.

$\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ a une structure de semi-anneau où l'addition est \min et la multiplication est $+$. (Un semi-anneau, informellement, est un anneau où les opposés n'existent pas nécessairement; autrement dit, c'est un monoïde pour la loi additive de même que pour la loi multiplicative, et les deux lois distribuent.) Cette structure induit une addition et une multiplication correspondante des matrices. Montrer que $I + M(S) + M^2(S) + \dots + M^k(S)$, où $+$ est l'addition des matrices en question (le \min entrée par entrée), et I est la matrice identité ($I_{ii} = 0$, $I_{ij} = +\infty$ si $i \neq j$), est une matrice dont l'entrée (i, j) est le poids du plus petit chemin de longueur $\leq k$ de x_i à x_j , ou $+\infty$ s'il n'existe pas de tel chemin.

5. En déduire un algorithme en temps polynomial testant si S a une solution ou non, et retournant une telle solution si elle existe.

6. Montrer que si S a une solution, et x_0 est une variable quelconque, alors S a une solution dans laquelle x_0 vaut 0. Pourquoi peut-on donc décider en temps polynomial des systèmes d'inéquations de la forme : (1) (cf. introduction), (2) $x \leq c$, (3) $x \geq c$?

7. En observant la forme des solutions retournée par l'algorithme, montrer qu'un système S a une solution ssi S a une solution *entière*, c'est-à-dire une où toutes les variables prennent des valeurs dans \mathbb{Z} .