Problèmes de sac à dos

1. On souhaite remplir un sac à dos avec des objets de sorte que leur valeur totale soit la plus grande possible. Les objets considérés sont classés en catégories 1, …, n. La masse d'un objet de catégorie i est $M_i > 0$, et sa valeur est $V_i > 0$. On a un nombre non borné d'objets de catégorie i pour tout i, mais le sac à dos ne peut supporter qu'une masse totale M sans casser.

   En notant x_i le nombre d'objets de catégorie i que l'on peut mettre dans le sac à dos, montrer que le problème du remplissage optimal du sac à dos décrit ci-dessus s'exprime en cherchant à maximiser
   $$\sum_{i=1}^{n} V_i x_i$$
   lorsque x_1, …, x_n sont dans $\mathbb{N}$, sujet à la contrainte
   $$\sum_{i=1}^{n} M_i x_i \leq M$$

2. Soit $V(m, M)$ la valeur maximale de $\sum_{i=1}^{m} V_i x_i$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} M_i x_i \leq M$, pour tout $m \leq n$. Trouver une relation de récurrence définissant $V(m, M)$.

3. En déduire un algorithme efficace calculant $V(n, M)$. Cet algorithme fonctionne-t-il en temps polynomial ? Discuter.

4. On suppose maintenant que l'on n'a plus qu'un seul objet de chaque catégorie (autrement dit chaque x_i varie dans $\{0, 1\}$), et que notre seule contrainte est que la valeur du sac à dos $\sum_{i=1}^{n} V_i x_i$ soit une valeur fixée V.

   Supposons que pour tout $m \leq n$, $V_m > \sum_{i=1}^{m-1} V_i$. Proposer un algorithme en temps polynomial répondant si l'objectif $\sum_{i=1}^{n} V_i x_i = V$ ($x_i \in \{0, 1\}$) est réalisable, et si oui retourne un vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ le réalisant. Ce vecteur est-il unique ?

5. Si la condition $V_m > \sum_{i=1}^{m-1} V_i$ n'est pas vérifiée, proposer un algorithme résolvant le même problème. En déduire que le problème est dans NP.