Graphes enracinés Un graphe enraciné G sur un alphabet fini Σ est un triplet $\langle V, E, r\rangle$ tel que V est un ensemble de pages, $E \subseteq V \times \Sigma \times V$ est un ensemble de liens et $r \in V$ est la racine de G. Le graphe G est dit déterministe $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pour chaque $a \in \Sigma$ et pour chaque $n \in V$, $\{n' : \langle n, a, n'\rangle \in E\}$ contient au plus une page. On note $\mathrm{REG}(\Sigma)$ l'ensemble des expressions régulières construites sur l'alphabet Σ à l'aide de la grammaire $e ::= a \mid \epsilon \mid e \cup e \mid e; e \mid e^*$ avec $a \in \Sigma$. ϵ dénote le mot vide. Comme d'habitude $\mathrm{L}(e)$ est défini comme le langage de mots finis Σ^* associé à l'expression régulière e. Par exemple $\mathrm{L}(a^*) = \{\epsilon, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$. Un mot $u \in \Sigma^*$ est un préfixe de $v \in \Sigma^*$ $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ v peut s'écrire sous la forme $u \cdot u'$ avec $u' \in \Sigma^*$ et $\cdot$ est l'opération de concaténation. Étant donné un graphe enraciné G, on note $(R_e^G)_{e \in \mathrm{REG}(\Sigma)}$ la famille de relations dans $V \times V$ définie inductivement de la façon suivante :

- $R_\epsilon^G = \{\langle n, n\rangle : n \in V\}$ et $R_a^G \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle n, n'\rangle : \langle n, a, n'\rangle \in E\}$ pour $a \in \Sigma$,
- $R_{e_1 \cup e_2}^G \stackrel{\text{def}}{=} R_{e_1} \cup R_{e_2}$,
- $R_{e_1;e_2}^G \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle n, n''\rangle : \exists\, n' \ \langle n, n'\rangle \in R_{e_1}^G \text{ et } \langle n', n''\rangle \in R_{e_2}^G\}$,
- $R_{e^*}^G$ est la fermeture réflexive et transitive de R_e^G.

Pour $n \in V$, on note $R_e^G(n)$ l'ensemble de pages $\{n' : \langle n, n'\rangle \in R_e^G\}$. Un graphe $G = \langle V, E, r\rangle$ est fini lorsqu'il possède un ensemble fini de pages.

Contraintes de chemins Une contrainte de chemin en avant est une expression de la forme $e_1 \to (e_2 \subseteq_{av} e_3)$ où e_1, e_2 et e_3 appartiennent à $\mathrm{REG}(\Sigma)$. De façon analogue, une contrainte de chemin en arrière est une expression de la forme $e_1 \to (e_2 \subseteq_{ar} e_3)$. Une contrainte de chemin sans étoile est une contrainte de chemin en avant ou en arrière sans occurrence de l'opérateur *. Une contrainte de chemin en avant simple est une contrainte de chemin en avant telle que $e_1 = \epsilon$. Un graphe enraciné G satisfait la contrainte $e_1 \to (e_2 \subseteq_{av} e_3)$ $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pour chaque page $n \in R_{e_1}^G(r)$, $R_{e_2}^G(n) \subseteq R_{e_3}^G(n)$. Le graphe G satisfait la contrainte $e_1 \to (e_2 \subseteq_{ar} e_3)$ $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pour chaque page $n \in R_{e_1}^G(r)$, $R_{e_2}^G(n) \subseteq \{n' : \langle n', n\rangle \in R_{e_3}^G\}$. Pour un ensemble de contraintes X, on écrit $G \models X$ lorsque chaque contrainte de X est satisfaite par G.

Problème de l'implication Le problème de l'implication consiste à vérifier, étant donnés un ensemble fini de contraintes X et une constrainte c si pour tous les graphes enracinés G, $G \models X$ implique $G \models \{c\}$. La taille d'un ensemble fini X est le nombre de symboles apparaissant dans X.

Question 1 Proposer un algorithme pour vérifier, étant donnés un graphe enraciné fini G et une contrainte en avant c, si $G \models \{c\}$ est vrai. Évaluer le temps de calcul de votre algorithme.

Question 2 Expliquer le sens de la proposition "Le problème de l'implication n'est pas un problème décidable".

Dans les questions 3 & 4 & 5 ci-dessous on se restreint aux graphes enracinés déterministes et aux contraintes de chemins sans étoiles (en avant et en arrière).

Question 3 Soient X_1, X_2 deux ensembles finis de contraintes de chemins sans étoiles et Y l'ensemble d'expressions régulières suivant

$$\{(e_1; e_2) : e_1 \to (e_2 \subseteq_{av} e_3) \in X_1 \cup X_2\} \cup \{(e_1; e_3) : e_1 \to (e_2 \subseteq_{av} e_3) \in X_1 \cup X_2\}$$

$$\cup\{(e_1;(e_2;e_3)) : e_1 \to (e_2 \subseteq_{ar} e_3) \in X_1 \cup X_2\}.$$

Soit Z l'ensemble

$$\{u \in \Sigma^* : \exists v \in \bigcup_{e \in Y} \mathrm{L}(e),\ u \text{ est un préfixe de } v\}.$$

Évaluer le cardinal de Z en fonction de la taille de $X_1 \cup X_2$.

Question 4 Soient X_1, X_2 et Z les ensembles de la question 3 et G un graphe enraciné déterministe tel que $G \models X_1$ et pour chaque contrainte $c \in X_2$, $G \models \{c\}$ n'est pas vérifié. Construire un graphe enraciné déterministe $G' = \langle V', E', r \rangle$ tel que le cardinal de V' soit égal au cardinal de Z, $G' \models X_1$ et pour chaque contrainte $c \in X_2$, $G' \models \{c\}$ n'est pas vérifié.

Question 5 Proposer un algorithme pour résoudre le problème de l'implication restreint aux graphes enracinés déterministes et aux contraintes de chemin sans étoile. Évaluer sa complexité en temps de calcul.

Dans les questions 6 & 7 & 8 ci-dessous on se restreint aux contraintes de chemins en avant simple. Nous rappelons qu'à chaque expression régulière e, on peut construire en temps polynomial un automate $\mathcal{A}_e = \langle Q_e, \delta_e, q_e^0, F_e \rangle$ tel que le langage accepté par $\mathcal{A}_e$ est précisemment $\mathrm{L}(e)$. La fonction de transition δ_e, de la forme $Q \times \Sigma \to 2^Q$, peut être étendue à $Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ en posant $\delta_e(q, a \cdot u) = \bigcup\{\delta_e(q', u) : q' \in \delta_e(q, a)\}$ pour $a \in \Sigma$ et $u \in \Sigma^*$. q_e^0 est l'état initial et F_e est l'ensemble des états finaux. Soient $\mathcal{A}_1 = \langle Q_1, \delta_1, q_1^0, F_1 \rangle$,$\mathcal{A}_2 = \langle Q_2, \delta_2, q_2^0, F_2 \rangle$ deux automates. L'automate produit $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \langle Q, \delta, q^0, F \rangle$ est défini par : $Q = Q_1 \times Q_2$, $F = F_1 \times F_2$, $q^0 = \langle q_1^0, q_2^0 \rangle$, $\delta(\langle q_1, q_2 \rangle, a) = \delta(q_1, a) \times \delta(q_2, a)$.

Question 6 Soit X un ensemble fini de contraintes de chemin en avant simple avec $X = \{\epsilon \to (e_1^1 \subseteq_{av} e_2^1), \ldots, \epsilon \to (e_1^{m_1} \subseteq_{av} e_2^{m_1})\}$. Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, q^0, F \rangle$ l'automate produit

$$\mathcal{A}_{e_1^1} \times \mathcal{A}_{e_2^1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{e_1^{m_1}} \times \mathcal{A}_{e_2^{m_1}}$$

Soient $G = \langle V, E, r \rangle$ et $G' = \langle V', E', r' \rangle$ deux graphes enracinés tel que

- $V' = \{\gamma(n) : n \in V\}$ avec $\gamma(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{q \in Q : q \in \delta(q^0, u),\ \langle r, n \rangle \in R_u^G\}$ (par souci de simplification le mot $u \in \Sigma^*$ est aussi considéré comme une expression régulière ici),
- $r' = \gamma(r)$,
- $\langle n_1, a, n_2 \rangle \in E' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ il existe $n_1', n_2' \in V$ tel que $\langle n_1', a, n_2' \rangle \in E$, $\gamma(n_1') = n_1$ et $\gamma(n_2') = n_2$.

Évaluer le cardinal de V en fonction de la taille de X.

Question 7 Montrer que pour chaque expression e de la forme e_1^i, e_2^i apparaissant dans X, pour chaque $n \in V$, $n \in R_e^G(r)$ si et seulement si $\gamma(n) \in R_e^{G'}(\gamma(r))$.

Question 8 Proposer un algorithme pour résoudre le problème de l'implication restreint aux contraintes de chemin en avant simples. Évaluer sa complexité en temps de calcul.