**Graphes colorés** Étant donné un ensemble infini $C = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$ de couleurs, un graphe coloré $G$ est un triplet $G = \langle V, E, v\rangle$ tel que $V$ est un ensemble de noeuds, $E \subseteq V \times V$ et $v$ est une fonction $v : V \to 2^C$ ($2^C$ est l'ensemble des sous-ensembles de $C$). Pour chaque $n \in V$, $v(n)$ désigne l'ensemble des couleurs du noeud $n$. Un graphe coloré est dit fini quand $V$ est fini et pour chaque $n \in V$, $v(n)$ est aussi fini. Étant donné un ensemble de noeuds $V$, $diag_V$ dénote l'ensemble d'arêtes $\{\langle n, n'\rangle : n, n' \in V,\ n \neq n'\}$.

**Extension du calcul propositionnel** L'ensemble des formules bien-formées L est décrit par la grammaire $\phi ::= c \mid \phi \wedge \phi \mid \neg\phi \mid \Box\phi$, où $c \in C$. "$\Box$" est un opérateur unaire. La taille d'une formule $\phi$, notée $|\phi|$, est définie comme le nombre d'occurrences des symboles $\neg$, $\wedge$ et $\Box$ dans $\phi$. L'ensemble des sous-formules d'une formule $\phi$ comprend les formules apparaissant dans la chaîne de caractères représentant $\phi$. Les formules de L sont interprétées sur les graphes colorés. "Le noeud $n \in V$ vérifie la formule $\phi$ dans le graphe coloré $G$" (noté $G, n \models \phi$) est défini inductivement de la façon suivante :

- $G, n \models c \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} c \in v(n)$,
- $G, n \models \neg\phi \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} G, n \models \phi$ n'est pas vérifié,
- $G, n \models \phi_1 \wedge \phi_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} G, n \models \phi_1$ et $G, n \models \phi_2$,
- $G, n \models \Box\phi \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pour tous les noeuds $n' \in E(n)$, on a $G, n' \models \phi$ avec $E(n) \overset{\text{def}}{=} \{n' : \langle n, n'\rangle \in E\}$.

**Question 1** Proposer un algorithme qui vérifie si $G, n \models \phi$ étant donnés $\phi \in$ L, $G = \langle V, E, v\rangle$ un graphe coloré fini et $n \in V$. Évaluer le temps de calcul de l'algorithme.

**Question 2** On note $LC^1[=]$ le fragment de la logique classique du premier ordre restreint aux symboles de prédicats ayant un unique argument et à l'égalité (sans symboles de fonction). Ce fragment est connu pour être décidable. Montrer qu'étant donnée une formule $\phi \in$ L, l'existence d'un graphe coloré $G = \langle V, E, v\rangle$ et de $n \in V$ satisfaisant $E = diag_V$ et $G, n \models \phi$ se réduit à la satisfaisabilité d'une formule de $LC^1[=]$.

**Question 3** Soient $G = \langle V, E, v\rangle$ un graphe coloré tel que $E = diag_V$, $n \in V$ et $\phi \in$ L vérifiant $G, n \models \phi$. Construire un graphe coloré fini $G' = \langle V', E', v'\rangle$ tel que $V' \subseteq V$, $n \in V'$ et le cardinal de $V'$ est inférieur à $2 \times |\phi| + 1$, $E'$ est la restriction of $E$ à $V'$ et pour toute sous-formule $\psi$ de $\phi$ et pour tout noeud $n' \in V'$, on a $G, n' \models \psi$ si et seulement si $G', n' \models \psi$.

**Question 4** Montrer que déterminer si une formule $\phi \in$ L admet un graphe coloré $G = \langle V, E, v\rangle$ pour lequel il existe $n \in V$ tels que $G, n \models \phi$ et $E = diag_V$ est un problème NP-complet.

**Abstractions** Soit $X$ un ensemble de formules clos par sous-formules, c'est-à-dire pour chaque $\phi \in X$, l'ensemble des sous-formules de $\phi$ est inclus dans $X$. Soit $G = \langle V, E, v\rangle$ un graphe coloré. On définit une relation $\equiv_X \subseteq V \times V$. Pour $n, n' \in G$, $n \equiv_X n' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pour chaque $\phi \in X$, $G, n \models \phi$ si et seulement si $G, n' \models \phi$. $\equiv_X$ est une relation d'équivalence et on note $|n|_X$ la classe d'équivalence du noeud $n$. Le graphe coloré $G' = \langle V', E', v'\rangle$ est une $X$-abstraction de $G \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ les conditions suivantes sont vérifiées :

- $V' = \{|n|_X : n \in V\}$,

- pour $n, n' \in V$, si $\langle n, n' \rangle \in E$ alors $\langle |n|_X, |n'|_X \rangle \in E'$,
- pour $n, n' \in V$, si $\langle |n|_X, |n'|_X \rangle \in E'$ alors pour chaque $\Box\phi \in X$, $G, n \models \Box\phi$ implique $G, n' \models \phi$,
- pour chaque $|n|_X \in V'$, $v'(|n|_X) \cap X = v(n) \cap X$.

**Question 5** Montrer que si $G'$ est une $X$-abstraction de $G$ alors pour chaque formule $\phi \in X$ et pour chaque noeud $n \in V$, on a $G, n \models \phi$ si et seulement si $G', |n|_X \models \phi$.

**Question 6** Soient $X$ un ensemble de formules clos par sous-formules et $G = \langle V, E, v \rangle$ un graphe coloré. Soit $G' = \langle V', E', v' \rangle$ le graphe coloré tel que

- $V' \stackrel{\text{def}}{=} \{|n|_X : n \in V\}$,
- pour $n, n' \in V$, $\langle |n|_X, |n'|_X \rangle \in E' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ il existe $n_0 \in |n|_X$ et $n'_0 \in |n'|_X$ tels que $\langle n_0, n'_0 \rangle \in E$,
- pour chaque $|n|_X \in V'$, $v'(|n|_X) \stackrel{\text{def}}{=} v(n) \cap X$.

Montrer que $G'$ est une $X$-abstraction de $G$.

**Question 7** Proposer un algorithme pour déterminer si une formule $\phi \in \mathrm{L}$ admet un graphe coloré $G = \langle V, E, v \rangle$ pour lequel il existe $n \in V$ vérifiant $G, n \models \phi$.