Dans la suite, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ représentent respectivement l'ensemble des entiers naturels et relatifs.

**Automate à un compteur sur $\mathbb{Z}$** Un automate à un compteur sur $\mathbb{Z}$ (abrégé en $\mathbb{Z}$-automate dans la suite) est un quadruplet $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F \rangle$ tel que $Q$ est un ensemble fini d'états, $I, F \subseteq Q$ et $\delta \subseteq Q \times \{\{0\}, \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \mathbb{Z}\} \times \{-1, 0, 1\} \times Q$. Une configuration de l'automate $\mathcal{A}$ est une paire $\langle q, x \rangle \in Q \times \mathbb{Z}$ : $q$ est l'état de contrôle courant et $x$ est la valeur courante du compteur. La relation de transition $\rightarrow \subseteq (Q \times \mathbb{Z})^2$ entre configurations est définie par : $\langle q, x \rangle \rightarrow \langle q', x' \rangle \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ il existe $test \in \{\{0\}, \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \mathbb{Z}\}$ et $c \in \{-1, 0, 1\}$ tels que $\langle q, test, c, q' \rangle \in \delta$, $x \in test$ et $x' = x + c$.

**Chemins** Un chemin fini $w$ est une séquence finie de configurations $w = \langle q_1, x_1 \rangle, \ldots, \langle q_n, x_n \rangle$, $n \geq 1$, telle que pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\langle q_i, x_i \rangle \rightarrow \langle q_{i+1}, x_{i+1} \rangle$. Un chemin infini $w$ est une fonction $\mathbb{N} \rightarrow (Q \times \mathbb{Z})$ telle que pour $i \in \mathbb{N}$, on a $w(i) \rightarrow w(i+1)$.

**Exécutions acceptantes** L'automate $\mathcal{A}$ a une exécution acceptante $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ il existe un chemin infini $w : \mathbb{N} \rightarrow (Q \times \mathbb{Z})$ tel que $w(0) = \langle q_0, 0 \rangle$ pour un état $q_0 \in I$ et il existe $q_f \in F$ tel que $\{i \in \mathbb{N} : w(i) \text{ est de la forme } \langle q_f, j \rangle\}$ est infini. L'état de contrôle $q_f$ est alors dit être répété infiniment souvent dans $w$.

**Automate à un compteur sur $\mathbb{N}$** Un automate à un compteur sur $\mathbb{N}$ (abrégé en $\mathbb{N}$-automate dans la suite) est un quadruplet $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F \rangle$ tel que $Q$ est un ensemble fini, $I, F \subseteq Q$ et $\delta \subseteq Q \times \{\{0\}, \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathbb{N}\} \times \{-1, 0, 1\} \times Q$. Une configuration de $\mathcal{A}$ est une paire $\langle q, x \rangle \in Q \times \mathbb{N}$. La relation de transition $\rightarrow \subseteq (Q \times \mathbb{N})^2$ est définie par : $\langle q, x \rangle \rightarrow \langle q', x' \rangle$ ssi il existe $test \in \{\{0\}, \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathbb{N}\}$ et $c \in \{-1, 0, 1\}$ tels que $\langle q, test, c, q' \rangle \in \delta$, $x \in test$ et $x' = x + c$. Les notions de chemins finis, chemins infinis et exécutions acceptantes sont définies de façon analogue en considérant les configurations dans $Q \times \mathbb{N}$.

**Question 1** Montrer que pour tout $\mathbb{Z}$-automate $\mathcal{A}$ on peut construire en temps polynomial en la taille de $\mathcal{A}$ un $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{A}'$ tel que $\mathcal{A}$ admet une exécution acceptante si et seulement si $\mathcal{A}'$ admet une exécution acceptante. La taille d'un automate $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F \rangle$, notée $|\mathcal{A}|$, est le cardinal de $Q$, noté $|Q|$, plus la cardinal de $\delta$, noté $|\delta|$.

**Question 2** Montrer que pour tout $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, I, F \rangle$ on peut construire en temps polynomial en $|\mathcal{A}|$ un $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{A}' = \langle Q', \delta', I', F' \rangle$ avec $\delta' \subseteq Q' \times \{\{0\}, \mathbb{N}\} \times \{-1, 0, +1\} \times Q'$ tel que $\mathcal{A}$ admet une exécution acceptante si et seulement si $\mathcal{A}'$ admet une exécution acceptante.

Dans la suite, on ne considère que des $\mathbb{N}$-automates avec $\delta \subseteq Q \times \{\{0\}, \mathbb{N}\} \times \{-1, 0, +1\} \times Q$. Un chemin infini $w : \mathbb{N} \rightarrow (Q \times \mathbb{N})$ est dit sans test à zéro $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$ (avec $w(i) = \langle q_i, x_i \rangle$), il existe $\langle q_i, \mathbb{N}, c, q_{i+1} \rangle \in \delta$ tel que $x_{i+1} = x_i + c$. Les chemins finis sans test à zéro sont définis de façon analogue.

**Question 3** Soit $w : \mathbb{N} \rightarrow (Q \times \mathbb{N})$ un chemin infini sans test à zéro tel qu'il existe $q_f \in F$ avec $\{i \in \mathbb{N} : w(i) \text{ est de la forme } \langle q_f, j \rangle\}$ infini. Montrer qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et un chemin fini $w' = \langle q_1, x_1 \rangle, \ldots, \langle q_n, x_n \rangle$ tels que $n > 1$, $\langle q_1, x_1 \rangle = w(i)$ avec $q_1 = q_n = q_f$, $x_n \geq x_1$ et $n \leq 2|Q|^2 + 3|Q|$.

**Question 4** Soit $w = \langle q_1, x_1\rangle, \ldots, \langle q_n, x_n\rangle$ un chemin fini de $\mathcal{A}$ tel que $x_n = x_1 + |Q|$. Montrer qu'il existe $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i < j$, $q_i = q_j$ et $(x_j - x_i) \in \{1, \ldots, |Q|\}$.

**Question 5** Soient $w = \langle q_1, x_1\rangle, \ldots, \langle q_n, x_n\rangle$ un chemin fini de $\mathcal{A}$ tel que $\langle q_2, x_2\rangle, \ldots, \langle q_n, x_n\rangle$ est sans test à zéro, $x_n = x_1 = 0$ et $i_{max} \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_{i_{max}} > |Q|^3 + 2|Q|^2 + 1$. Construire une séquence $k_1 < k'_1 < k_2 < k'_2 < \cdots < k_{|Q|^2} < k'_{|Q|^2} < i_{max}$ telle que

- $x_{k_1} \geq |Q|^2 + 1$,
- $q_{k_i} = q_{k'_i}$ et $x_{k'_i} - x_{k_i} \in \{1, \ldots, |Q|\}$ pour chaque $i \in \{1, \ldots, |Q|^2\}$.

**Question 6** Soit $w = \langle q_1, x_1\rangle, \ldots, \langle q_n, x_n\rangle$ un chemin fini de $\mathcal{A}$ tel que $\langle q_2, x_2\rangle, \ldots, \langle q_n, x_n\rangle$ est sans test à zéro et $x_n = x_1 = 0$. Montrer qu'il existe un chemin fini $w' = \langle q'_1, x'_1\rangle, \ldots, \langle q'_{n'}, x'_{n'}\rangle$ tel que $q'_1 = q_1$, $q'_{n'} = q_n$, $x'_n = x'_1 = 0$ et pour chaque $i \in \{1, \ldots, n'\}$, $x'_i \leq |Q|^3 + 2|Q|^2 + 1$.

**Question 7** Soit $w = \langle q_1, x_1\rangle, \ldots, \langle q_n, x_n\rangle$ un chemin fini de $\mathcal{A}$ tel que $x_n = x_1 = 0$. Montrer qu'il existe un chemin fini $w' = \langle q'_1, x'_1\rangle, \ldots, \langle q'_{n'}, x'_{n'}\rangle$ vérifiant $q'_1 = q_1$, $q'_{n'} = q_n$, $x'_n = x'_1 = 0$ et $n' \leq |Q|^5 + 2|Q|^4 + |Q|^2$.

**Question 8** En déduire qu'il existe un polynôme $p(x)$ vérifiant l'équivalence entre $(\star)$ et $(\star\star)$ pour tous les $\mathbb{N}$-automates $\mathcal{A}$ ayant $\delta$ inclus dans $Q \times \{\{0\}, \mathbb{N}\} \times \{-1, 0, +1\} \times Q$.

$(\star)$ L'automate $\mathcal{A}$ admet une exécution acceptante $w : \mathbb{N} \to (Q \times \mathbb{N})$ pour laquelle il existe $i \in \mathbb{N}$ et un chemin infini sans test à zéro $w' : \mathbb{N} \to (Q \times \mathbb{N})$ défini par $w'(j) = w(i + j)$ pour chaque $j \in \mathbb{N}$.

$(\star\star)$ Il existe un chemin fini $\langle q_1, x_1\rangle, \ldots, \langle q_n, x_n\rangle$ avec $n \leq p(|Q|)$ et $i' < n$ tels que $q_{i'} = q_n \in F$, $x_{i'} \leq x_n$, $q_1 \in I$, $x_1 = 0$ et $\langle q_{i'}, x_{i'}\rangle, \ldots, \langle q_n, x_n\rangle$ est un chemin fini sans test à zéro.