Extension du calcul propositionnel Soit VARPROP $= \{p_0, p_1, \ldots\}$ un ensemble infini de variables propositionnelles. L'ensemble des formules bien-formées L, étendant le calcul propositionnel, est décrit par la grammaire suivante : $\phi ::= p \mid \phi \wedge \phi \mid \phi \Rightarrow \phi \mid \neg\phi \mid \Box\phi$, où $p \in$ VARPROP. "$\Box$" est un opérateur unaire. La taille d'une formule ϕ est définie comme le nombre d'occurrences des symboles $\neg$, $\wedge$, $\Rightarrow$ et $\Box$ dans ϕ. L'ensemble des sous-formules d'une formule ϕ comprend les formules apparaissant dans la chaîne de caractères représentant ϕ.

Calcul de séquents Un séquent $s = \langle \Gamma, \Delta \rangle$ est une paire composée d'ensembles finis de L. Le séquent $\langle \Gamma, \Delta \rangle$ sera noté dans la suite $\Gamma \vdash \Delta$ et Δ, ϕ dénote l'ensemble $\Delta \cup \{\phi\}$ (la virgule "," est l'opérateur d'union ensembliste). De même, ψ, ϕ dans un séquent correspond à $\{\psi, \phi\}$. Les expressions $\Gamma, \phi, \phi \vdash \Delta$ et $\Gamma, \phi \vdash \Delta$ représentent donc le même séquent. Un séquent initial est un séquent de la forme $\Gamma, \phi \vdash \Delta, \phi$. Le calcul C1 est composé de l'ensemble des séquents initiaux et des règles d'inférence ci-dessous (Γ, Δ et Σ sont des sous-ensembles finis de L) :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi}{\Gamma, \neg\phi \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\phi}\ (\vdash \neg) \qquad \frac{\Gamma, \phi_1, \phi_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \Delta}\ (\wedge \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi_1 \quad \Gamma \vdash \Delta, \phi_2}{\Gamma \vdash \Delta, \phi_1 \wedge \phi_2}\ (\vdash \wedge)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi_1 \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \phi_1 \Rightarrow \phi_2 \vdash \Delta}\ (\Rightarrow\vdash) \qquad \frac{\Gamma, \phi_1 \vdash \Delta, \phi_2}{\Gamma \vdash \Delta, \phi_1 \Rightarrow \phi_2}\ (\vdash\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \Box\phi, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \Box\phi \vdash \Delta}\ (\Box \vdash) \qquad \frac{\Box\Gamma \vdash \phi}{\Sigma, \Box\Gamma \vdash \Box\phi, \Delta}\ (\vdash \Box)_{C1}$$

Le calcul C2 est défini comme le calcul C1 sauf que la règle $(\vdash \Box)_{C1}$ est remplacée par la règle :

$$\frac{\Box\Gamma, \Box(\phi \Rightarrow \Box\phi) \vdash \phi}{\Sigma, \Box\Gamma \vdash \Box\phi, \Delta}\ (\vdash \Box)_{C2}$$

Dans les règles $(\vdash \Box)_{C1}$ et $(\vdash \Box)_{C2}$, $\Box\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{\Box\psi : \psi \in \Gamma\}$. Une preuve d'un calcul C (ici C1 ou C2) est un arbre fini dont les noeuds sont étiquetés par des séquents tel que

– les feuilles sont étiquetées par des séquents initiaux,
– si un noeud est étiqueté par s_1 et a un unique noeud fils étiqueté par s_2 alors il existe une règle unaire $\frac{s'_2}{s'_1}$ de C telle que s_1, s_2 est une instance de s'_1, s'_2,
– si un noeud est étiqueté par s_1 et a deux noeuds fils étiquetés respectivement par s_2 et s_3 alors il existe une règle binaire $\frac{s'_2 \quad s'_3}{s'_1}$ de C telle que s_1, s_2, s_3 est une instance de s'_1, s'_2, s'_3.

Le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est dérivable dans le calcul C $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ il existe une preuve de C dont la racine est étiquetée par $\Gamma \vdash \Delta$. Le séquent $p \wedge q \vdash q \wedge p$ est dérivable dans C1 et C2 comme en témoigne la preuve ci-dessous (la racine est en bas) :

$$\cfrac{\cfrac{p, q \vdash q \quad p, q \vdash p}{p, q \vdash q \wedge p}}{p \wedge q \vdash q \wedge p}$$

La formule ϕ est dérivable dans C $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\emptyset \vdash \phi$ (aussi noté $\vdash \phi$) est dérivable dans C.

Question 1 Trouver une preuve de $\Box(p \Rightarrow q) \vdash \Box p \Rightarrow \Box q$ dans le calcul C1. En déduire une preuve dans le calcul C2.

Question 2 Prouver que si $\Gamma \vdash \Delta$ est dérivable dans C1 (respectivement dans C2) alors $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ est dérivable dans C1 (respectivement dans C2) pour tous les séquents $\Gamma' \vdash \Delta'$. En déduire que si $\phi_1 \Rightarrow \phi_2$ est dérivable dans C1 alors $\Box\phi_1 \Rightarrow \Box\phi_2$ l'est aussi.

Question 3 Proposer un algorithme pour déterminer si un séquent est dérivable dans le calcul C1. Évaluer sa complexité en temps de calcul. Peut-on l'adapter au calcul C2 ?

Question 4 Soit $\mathrm{T} : \mathrm{L} \times \{0,1\} \to \mathrm{L}$ la traduction :

- $\mathrm{T}(p,0) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{T}(p,1) \stackrel{\text{def}}{=} p$ pour $p \in \mathrm{VARPROP}$,
- $\mathrm{T}(\neg\phi,i) \stackrel{\text{def}}{=} \neg\mathrm{T}(\phi,1-i)$ pour $i \in \{0,1\}$,
- $\mathrm{T}(\phi_1 \wedge \phi_2,i) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{T}(\phi_1,i) \wedge \mathrm{T}(\phi_2,i)$ pour $i \in \{0,1\}$,
- $\mathrm{T}(\phi_1 \Rightarrow \phi_2,i) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{T}(\phi_1,1-i) \Rightarrow \mathrm{T}(\phi_2,i)$ pour $i \in \{0,1\}$,
- $\mathrm{T}(\Box\phi,1) \stackrel{\text{def}}{=} \Box(\mathrm{T}(\Box(\phi \Rightarrow \Box\phi) \Rightarrow \phi,1))$, $\quad \mathrm{T}(\Box\phi,0) \stackrel{\text{def}}{=} \Box\mathrm{T}(\phi,0)$.

Vérifier que T est bien définie et évaluer la taille de $\mathrm{T}(\phi,i)$ en fonction de la taille de ϕ.

On admettra dans la suite que pour chaque $\phi \in \mathrm{L}$ et $i \in \{0,1\}$, $\phi \Rightarrow \mathrm{T}(\phi,i)$ et $\mathrm{T}(\phi,i) \Rightarrow \phi$ sont dérivables dans C2.

Question 5 Montrer par induction que pour chaque $\phi \in \mathrm{L}$, $\phi \Rightarrow \mathrm{T}(\phi,1)$ et $\mathrm{T}(\phi,0) \Rightarrow \phi$ sont dérivables dans C1.

Question 6 Montrer que pour toute formule $\phi \in \mathrm{L}$, ϕ est dérivable dans C2 si et seulement si $\mathrm{T}(\phi,1)$ est dérivable dans C1.