EPREUVE ECRITE D'INFORMATIQUE

ENS : PARIS - LYON - CACHAN

Durée : 4 heures ***Coefficients*** **: PARIS 4 - LYON 4**

MEMBRES DE JURYS : H. COMON, G. HANROT, P . LESCANNE

L'idée clé du problème était l'étude des suites de Goodstein qui sont des suites d'entiers naturels qui croissent tout d'abord vertigineusement vite pour enfin décroître très lentement vers zéro par décrémentation de un à chaque pas. La question 3.9 demande de démontrer que toute suite de Goodstein atteint 0. Pour illustrer le concept, le problème s'intéresse à une suite particulière qui prend les valeurs $10, 83, 1025, \ldots$ La question 2.6 demande de démontrer que cette suite particulière dépasse la valeur 1000^{1000}. Cette valeur est choisie arbitrairement, on aurait pu pendre des valeurs encore plus grandes comme $7000^{7000^{7000}}$. Cette suite n'est pas strictement croissante quoiqu'un cinquième des candidats aient réussi à le « démontrer ». A fortiori, on n'a pas $g_k > k^k$. On peut regretter que *les candidats ne lisent pas suffisamment l'énoncé* qui dans son préambule parlait de terminaison ce qui aurait dû éveiller leur vigilance, mais qui surtout dans sa question 3.9 rejetait clairement la croissance de toute suite de Goodstein. Pour ne pas désavantager les candidats qui honnêtement se sont abstenu d'aborder la fin de la question 2.6 ou qui ont annulé[1] une tentative erronée, les correcteurs ont enlevé des points aux candidats qui ont proposé une preuve de la croissance de $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
De façon générale, le principal souci des correcteurs cette année a été la faiblesse de la rédaction. Le sujet abondait en récurrences et inductions structurelles (que l'on pouvait toujours remplacer par des récurrences sur la somme des tailles des arbres concernés). Rappelons qu'il est *indispensable* d'identifier clairement l'hypothèse de récurrence, ou d'induction, comme préalable à la démonstration. L'énoncé le demandait spécifiquement en ce qui concernait les inductions structurelles,
En dehors des récurrences, la rédaction de la plupart des candidats faisait généralement preuve d'un manque de précision inhabituel (cf. les commentaires question par question pour des détails). Comme toute discipline scientifique, l'informatique exige des réponses précises et rigoureuses.
Une leçon que les candidats pourraient tirer des paragraphes qui précèdent est qu'il est préférable de traiter rigoureusement et intégralement une partie peu importante du sujet que de butiner les questions faciles de toutes les parties et de les traiter à la va-vite. Signalons qu'*un candidat ayant traité intégralement et sans faute les parties 1 et 2 obtenait 20.* Une copie qui s'est limitée à ces deux parties, mais en traitant intégralement le sujet jusquà 2.6 et abordant significativement 2.7 a d'ailleurs obtenu plus de 15.
Dans l'ensemble les candidats ont abordé les parties 1, 2 et 3 à l'exception des questions algorithmiques 2.7 et 2.8 et de la question 3.6. Les candidats ont abordé les questions faciles de la partie 4 tandis que ceux qui ont abordé la partie 5 appartiennent clairement à la confrérie des « grappilleurs ». Voici quelques commentaires plus spécifiques.
L'énoncé comprenait une imprécision : $\mathtt{dec1}(n) = (p, q)$ ne définissait pas p comme le plus grand tel que $n = b^p + q$ et une faute de terminologie : dans l'indication de la question 3.6, il fallait lire « mots décroissants » au lieu de « mots ordonnés ». Ces toutes petites erreurs marginales n'ont pas gêné les candidats et les correcteurs ont apprécié quand les candidats les signalaient.
Les correcteurs ont comme d'habitude aimé la poésie de certaines tournures, comme les suites qui *stationnent* ou *stagnent*, les candidats qui assoient leurs preuves sur un *bon fondement*, les algorithmes *coûteux mais efficaces* ou ceux qui suggèrent que la question 1.1 est sans intérêt.

[1]Les candidats devraient clairement mettre en évidence ces repentirs afin que le correcteur les voie clairement.

Question 1.1 Seul un petit quart des candidats a répondu correctement à cette question,

- soit que les candidats ne savent pas manipuler le principe que toute proposition est conséquence du faux,
- soit qu'ils ne connaissent pas la définition de l'antisymmétrie, souvent assimilée à la non symétrie ou à la propriété $\forall(x,y) \in E \times E \quad xRy \Rightarrow \neg(yRx)$ qui exclut de fait la réflexivité.

2.3 Environ 20% des copies oublient un ou deux des quatre exemples. Il faut absolument rappeler aux candidats qu'il est important de lire *avec attention* le sujet.

2.4, 2.7, 2.8 en général, quoique l'énoncé rappelât bien l'importance que les correcteurs y attachait, les questions algorithmiques ont été peu abordées, hormis la question 2.4. Dans la question 2.4, beaucoup de copies ont su donner correctement les types associés aux identificateurs. Certaines copies ont bien montré que le candidat comprenait le fonctionnement du programme : parcours gauche droite et descendant du programme. Un candidat a même donné l'invariant de la boucle. La deuxième partie de la question 7 était algorithmiquement difficile quoiqu'assez classique. Il s'agissait de proposer un algorithme d'addition (opération connue des Babyloniens et des Chinois) dans une représentation des entiers naturels. Quelques candidats ont pu proposer une approche possible qui consiste à regrouper dans un arbre les décompositions identiques et à faire des calculs avec retenues. La question 2.8 était plus facile, il s'agissait de définir la multiplication en s'appuyant sur l'addition et on peut regretter que trop peu de candidats l'aient abordé.

2.5 la question 2.5 était la seule question de complexité. Il s'agissait de montrer que la complexité de l'algorithme qui reconstruit un nombre à partir de l'arbre qui le représente est linéaire en la taille de l'arbre. Il n'y a pas de pire cas. De plus, quand on dit qu'une opération a un coût constant, cela ne veut pas dire qu'elle a un coût unitaire.

2.6 Comme indiqué plus haut, on trouve beaucoup de preuves de $g_k > k^k$. Quelques candidats calculent g_5 et g_6, et comprennent ce qui se produit ; arriver à rédiger leur réponse semble toutefois leur poser des problèmes.

3.1 La plupart des candidats manque de soin dans la rédaction de la réponse à cette question. Dans l'irreflexivité, nombre de candidats expliquent que si on a $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2 \succ \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2$, alors comme $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1$ on a $\mathcal{A}_2 \succ \mathcal{A}_2$. Le lecteur est libre de décider s'il s'agit d'une rédaction malheureuse ou si les candidats ne se sont pas aperçus qu'il faut appliquer l'hypothèse d'induction aussi à $\mathcal{A}_1$.

3.2 Beaucoup de dessins, moins de définitions formelles qui seules permettent pourtant de donner une preuve précise de la décroissance de la suite, preuve indiquée comme évidente dans beaucoup de copies.

3.3 L'énoncé demande de montrer que l'ordre produit est un ordre strict bien fondé, il faut donc montrer les trois propriétés nécessaires, et non pas considérer que deux d'entre elles sont triviales. La remarque de 3.1 s'applique aussi ici concernant l'irreflexivitié. Beaucoup de réponses pour la bonne fondation souffrent d'arguments boîteux ("si (a_n) n'est pas strictement décroissante, alors (b_n) est strictement décroissante, contradiction") ou de rédactions imprécises.

3.4 Visiblement beaucoup de candidats ont été désarçonnés par le fait que l'on étudie des mots sur un alphabet potentiellement infini. Pour couper court à toute difficulté, certains candidats affirment péremptoirement que l'alphabet est fini. Très peu de réponses correctes pour le sens difficile.

3.5 Beaucoup de copies "définissent" le successeur comme obtenu "en ajoutant un **O** le plus à droite possible".

3.8 La rédaction des récurrences est toujours aussi malmenée.

Parties IV et V Très peu abordées, et beaucoup de réponses relèvent du bluff (la transitivité dans 4.2 n'est pas triviale, et la question 5.1 non plus). *Il faut bien que les candidats comprennent que s'il leur reste du temps en fin d'épreuve, il vaut mieux revenir sur les questions qu'ils n'auraient pas traitées au début de l'épreuve que de s'aventurer à grapiller d'hypothétiques points en fin d'épreuve.* Ce faisant, non seulement ils n'obtiendront que peu de points supplémentaires, mais ils risquent de susciter l'ire du correcteur.