Figures de $\mathbb{Z}^2$

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des Écoles Normales Supérieures

Durée de l'épreuve : 4 heures – Cœfficient: 4

Juillet 2003

N'oubliez en aucun cas de recopier votre $\mathbf{u_0}$ clairement encadré au début de votre copie.

Notes. Lorsque la description d'un algorithme est demandée, celle-ci doit être courte et précise.

Quand on demande le temps de calcul d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande son ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple : $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...

Si votre programme s'avère très lent pour les grandes valeurs des paramètres d'une question, il est déconseillé d'attendre le résultat passivement.

1 Préliminaire

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ suivante qui sera utilisée pour construire les entrées des algorithmes demandés. Le plus grand soin doit être porté à son implémentation.

- u_0 est donné sur votre table. **(À reporter en haut de votre copie !)**
- $u_n = (16\,383 \times u_{n-1}) \,\mathrm{modulo}\, 59\,047, \quad$ pour $n \geq 1$.

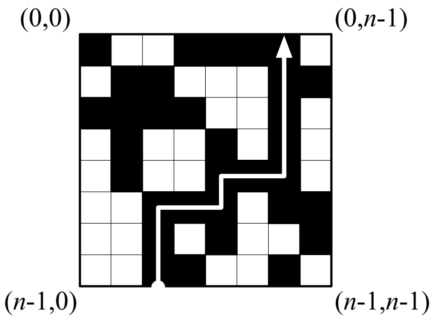
Question 1 *Que valent u_{734} et $u_{19\,236}$? Quel est le nombre d'indices i, $0 \leq i < 100\,000$ tels que $3\,000 \leq u_i \leq 7\,000$?*

2 Percolation

Soit $(A(i,j))_{0\leq i,j<n}$ une matrice $n \times n$ à valeurs dans $\{0,1\}$. A est vue comme une figure inscrite dans un carré de côté n dans $\mathbb{Z}^2$, où les 0 sont les cases blanches et les 1, les cases noires. On oriente les axes de $\mathbb{Z}^2$ pour faire correspondre les coordonnées des cases avec leurs entrées correspondantes

dans la matrice A. Ainsi $A(0,0)$, $A(0,n-1)$, $A(n-1,0)$ et $A(n-1,n-1)$ sont respectivement les cases des coins en haut à gauche, en haut à droite, en bas à gauche, et en bas à droite.

On considère la relation de 4-voisinage sur $\mathbb{Z}^2$: deux cases sont *voisines* si elles ont un côté en commun ; toute case a exactement quatre voisins. On appelle chemin dans A de longueur ℓ, toute suite de cases noires distinctes $c_1, \ldots, c_\ell$ de A, où c_i est voisine avec c_{i+1}, pour tout $1 \leq i < \ell$. On dit que A *percole* s'il existe un chemin qui relie le côté bas au côté haut de A, comme illustré ci-dessous.



Pour tous entiers $1 \leq n \leq 1\,000$, $0 \leq p \leq 100$ et $b \geq 0$, on définit la matrice $(A_{n,b,p}(i,j))_{0 \leq i,j < n}$ de la façon suivante :

$$A_{n,b,p}(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u_{((b \times u_i + i + n \times j) \text{ modulo } 100\,000)} \text{ modulo } 100) < p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Question 2 *Donnez* $A_{3,1,50}$.

Question 3 *Prenons* $n = 100$, $b = 2$, *et* $p = 50$. *Que vaut* $A_{100,2,50}(50,50)$ *? Combien il y a-t-il de* 1 *dans* $A_{100,2,50}$ *? Quel est le plus petit indice* i, $0 \leq i < 100$, *tel que la ligne* i *de la matrice* $A_{100,2,50}$ *contienne le nombre maximum de* 1 *?*

Pour chaque n et b, on note $p^*(n,b)$ le plus petit entier $0 < p \leq 100$ tel que $A_{n,b,p}$ percole.

Question 4 *Que valent* $p^*(10,0)$, $p^*(20,0)$, $p^*(50,0)$, $p^*(100,0)$, $p^*(200,0)$, $p^*(500,0)$ *? Détaillez l'algorithme et les structures de données que vous avez utilisés. Évaluez son temps de calcul en fonction de* n.

Question 5 *Donnez la distribution de* $p^*(50,b)$ *pour* $0 \leq b \leq 100$, *i.e., pour chaque* $0 < p \leq 100$, *donnez le nombre de* b, $0 \leq b \leq 100$, *tels que* $p^*(50,b) = p$. *Que remarquez-vous (en une ligne) ?*

Question 6 *Posons* $n = 50$, $b = 0$ *et* $p^* = p^*(n, b)$. *Quelle est la longueur d'un plus court chemin reliant une case noire du côté bas à une case noire du haut de* A_{n,b,p^*} *? Même question pour* $n = 100$ *et* $b = 0$, *puis* $n = 200$ *et* $b = 0$.

Décrivez de façon concise, votre algorithme et les structures de données que vous avez utilisées. Donnez son temps de calcul en fonction de n.

Question 7 *Posons* $n = 12$, $b = 0$ *et* $p^* = p^*(n, b)$. *Donnez un plus court chemin reliant le côté bas au côté haut de* A_{n,b,p^*} *(en donnant par exemple, son origine, son arrivée et la suite des déplacements).*

Question 8 *Posons* $n = 30$, $b = 0$ *et* $p^* = p^*(n, b)$. *Donnez le nombre de plus courts chemins distincts reliant le côté bas au côté haut de* A_{n,b,p^*}. *Même question pour* $n = 45$ *et* $b = 0$.

Décrivez de façon concise, votre algorithme et les structures de données que vous avez utilisées. Donnez son temps de calcul en fonction de n.

3 Étude de la composante géante

On dit que deux cases noires d'une figure A sont dans la même composante connexe, s'il existe dans A un chemin (de cases noires) allant de l'une à l'autre. Les *composantes connexes* de A sont les classes d'équivalence définies par cette relation. Par exemple la figure page 2 a quatre composantes connexes.

Question 9 *Posons* $n = 50$, $b = 0$ *et* $p^* = p^*(n, b)$. *Quel est le nombre de composantes connexes de* A_{n,b,p^*} *? Quelle est la taille (en nombre de cases noires) de la plus grande composante connexe ? Quelle est la taille de la deuxième plus grande composante connexe ?*

Décrivez de façon concise, votre algorithme et les structures de données que vous avez utilisées. Donnez son temps de calcul en fonction de n.

On remarque que, pour $p^* = p^*(n, b)$, A_{n,b,p^*} n'admet qu'une unique composante connexe de taille maximale. On appelle cette composante, la *composante géante* de A_{n,b,p^*}.

On appelle *complémentaire* d'une figure A, la figure infinie obtenue en inversant les couleurs des cases de A dans tout $\mathbb{Z}^2$. On appelle *trous* d'une composante connexe C de A, les composantes connexes de taille finie du complémentaire de C ; l'unique composante connexe infinie du complémentaire de C, est appelée l'*extérieur* de C. On appelle *périmètre* d'une composante connexe C, la longueur de la frontière de son extérieur. Par exemple, la plus grande composante connexe de la figure page 2 a un trou (de taille 1), et son périmètre est 42.

Question 10 *Posons $n = 20$, $b = 0$ et $p^* = p^*(n, b)$. Quel est le nombre de trous de la composante géante de A_{n,b,p^*} ? Quelle est la surface de son plus gros trou ? Mêmes questions pour $n = 50$ et $b = 0$, puis $n = 100$ et $b = 0$, et enfin $n = 200$ et $b = 0$.*

Question 11 *Posons $n = 20$, $b = 0$ et $p^* = p^*(n, b)$. Quelle est la longueur du périmètre de la composante géante de A_{n,b,p^*} ? Même question pour $n = 50$ et $b = 0$, puis $n = 100$ et $b = 0$, et enfin $n = 200$ et $b = 0$.*

Décrivez de façon concise, votre algorithme et les structures de données que vous avez utilisées. Donnez son temps de calcul en fonction de n.

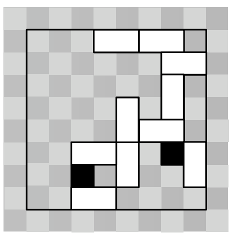
On dit qu'une composante connexe d'une figure A est *simplement connexe* si elle n'a pas de trou.

Question 12 *Posons $n = 20$, $b = 0$ et $p^* = p^*(n, b)$. Quelle est la taille de la plus grande composante simplement connexe de A_{n,b,p^*} ? Même question pour $n = 50$ et $b = 0$, puis $n = 100$ et $b = 0$, et enfin $n = 200$ et $b = 0$.*

4 Pavages par des dominos

Dans cette section, nous étudions le problème du pavage de figures par des dominos rectangulaires de taille 2×1 et 1×2. Un *pavage* d'une figure C est un ensemble de dominos placés sur les cases noires de C, sans qu'ils se chevauchent, ni qu'ils ne débordent de C. La *taille* d'un pavage est le nombre de dominos qui le composent. On appelle *pavage maximum* d'une figure, un pavage de taille maximum de la figure. Lorsqu'une figure C admet un pavage qui recouvre toutes ses cases noires exactement, on dit que C est *pavable*. Toute figure pavable a nécessairement une surface paire. On dit qu'une figure est *équilibrée* si lorsqu'on la place sur un échiquier, ses cases noires recouvrent exactement autant de cases noires que de cases blanches de l'échiquier. En fait, toute figure pavable est équilibrée. La raison en est que tout domino couvre exactement une case blanche et une case noire d'un échiquier.

Voici un exemple de pavage maximum de la composante géante de la figure page 2. On constate que bien que cette figure soit équilibrée, elle n'est pas pavable.

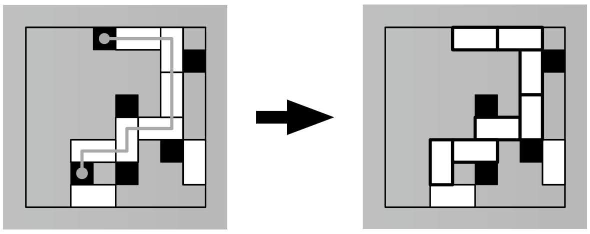


Question 13 *Posons $n = 20$, $b = 0$ et $p^* = p^*(n, b)$. La composante géante de A_{n,b,p^*} est-elle équilibrée ? Même question pour $n = 50$ et $b = 0$, puis $n = 100$ et $b = 0$, et enfin $n = 500$ et $b = 0$.*

Considérons un pavage $\mathcal{P}$ d'une figure C. Un chemin $c_1, \ldots, c_{2\ell}$ dans C est dit *améliorant* si :

– les cases c_1 et $c_{2\ell}$ ne sont pas couvertes par $\mathcal{P}$, et
– pour tout $1 \leq i < \ell$, les deux cases c_{2i} et c_{2i+1} sont couvertes par le même domino dans $\mathcal{P}$.

Un chemin améliorant permet d'augmenter la taille du pavage $\mathcal{P}$, en décalant les dominos le long du chemin :



Il est facile de démontrer que, pour toute figure C de $\mathbb{Z}^2$, un pavage de C est maximum si et seulement s'il n'existe pas de chemin améliorant (car les cycles – chemins revenant à leurs points de départ – de C sont tous de longueur paire).

Question 14 *Posons $n = 20$, $b = 0$ et $p^* = p^*(n, b)$. Quelle est la taille d'un pavage maximum de la composante géante de A_{n,b,p^*} ? Même question pour $n = 50$ et $b = 0$, puis $n = 100$ et $b = 0$, et enfin $n = 200$ et $b = 0$.*

Décrivez de façon concise, votre algorithme et les structures de données que vous avez utilisées. Donnez son temps de calcul en fonction de n.

Question 15 *Quel est le nombre de pavages (distincts) couvrant exactement le carré $n \times n$ pour $1 \leq n \leq 6$?*

Décrivez de façon concise, votre algorithme et les structures de données que vous avez utilisées. Estimez son temps de calcul en fonction de n.

Question 16 *Quel est le nombre de figures connexes distinctes (à translation près) de taille 8 ? Quel est le nombre de figures connexes et équilibrées de taille 8 ? Quel est le nombre de figures connexes pavables de taille 8 ?*

Décrivez de façon concise, vos algorithmes et les structures de données que vous avez utilisées. Estimez leurs temps de calcul en fonction de n.

— FIN —