Logiques sur les graphes

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des Ecoles Normales Supérieures
Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 4

Juillet 2003

Ce problème est consacré à l'étude de certains opérateurs logiques sur les graphes. Ces opérateurs permettent d'énoncer des propriétés sur les chemins d'un graphe issu d'un sommet (e. g., "Quelques sont les sommets qui sont sources de chemins menant à un sommet ou à un ensemble donné ?").

Le préambule élabore les données qui seront appliquées aux algorithmes du problème. Il est cependant fortement conseillé de tester au préalable vos algorithmes sur des données plus petites (e. g., "un graphe de moins de 5 sommets"). La partie 1 doit être traîtée en premier. Par contre, la partie 2 et les 3 premières questions de la partie 3 sont largement indépendantes.

Nous appelons complexité d'un algorithme, l'ordre de grandeur du nombre d'instructions exécutées suite au lancement de l'algorithme, par exemple $O(n)$, $O(n^2)$.

Préambule

Un graphe (orienté) G est représenté par un couple (S, R), où S est un ensemble fini de sommets et R est une relation binaire sur S ($R \subseteq S \times S$). On dit que (u, v) est un arc de G si $(u, v) \in R$. Le degré sortant d'un sommet est le nombre d'arcs qui en partent, et le degré rentrant d'un sommet est le nombre d'arcs qui y arrivent. Le degré sortant (resp., degré entrant) d'un graphe est le maximum des degrés sortants (resp., degrés entrants) des sommets.

Soit $N = 100$. Soit (x_i) la suite récurrente définie par x_0 égal au numéro inscrit sur votre table d'examen et $x_{i+1} = (3221 \cdot x_i + 5701) \bmod (N^2 - 9)$. On définit le graphe $G = (S, R)$ par :

$$\begin{array}{rrcl} & S & = & \{0, \cdots, N-1\} \\ \text{et} & R & = & \{(u,v) | N \cdot x_{v+N\cdot u} \leq 2 \cdot (N^2 - 9)\} \cup \\ & & & \{(u,u) | \forall v \in S : N \cdot x_{v+N\cdot u} > 2 \cdot (N^2 - 9)\}. \end{array}$$

On notera que le degré sortant de tout sommet est non nul.

Dans vos programmes, le graphe G sera codé par une matrice $N \times N$, $R = (r_{uv})$ telle que $r_{uv} = 1$ si $(u, v) \in R$ sinon $r_{uv} = 0$. Tout ensemble P de sommets sera codé par un vecteur de taille N, $P = (p_u)$ avec $p_u = 1$ si $u \in P$ sinon $p_u = 0$.

On pose A l'ensemble des sommets de degré sortant 1 et B l'ensemble des sommets de degré entrant 1.

Question 1 *Combien d'arcs contient le graphe G ?*

Question 2 *Quel est le degré sortant et le degré entrant du graphe G ?*

Question 3 *Quel est le cardinal des ensembles A et B ?*

1 Les opérateurs EX, AX

Soit P un ensemble de sommets, on pose :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{EX}(P) & = & \{u \in S \mid \exists v \in P : (u, v) \in R\} \\ \mathrm{AX}(P) & = & \{u \in S \mid \forall v \in S : (u, v) \in R \Rightarrow v \in P\} \end{array}$$

Question 4 *Donner une description concise des algorithmes d'évaluation des opérateurs EX et AX. Donner leurs complexités en fonction de N. Calculer le cardinal des ensembles $EX(A)$, $AX(B)$, $AX(EX(B))$ et $EX(AX(B))$.*

On note $\widetilde{\mathrm{EX}}$, $\widetilde{\mathrm{AX}}$ les opérateurs duaux de EX et AX : $\widetilde{\mathrm{EX}}(P) = \neg\mathrm{EX}(\neg P)$, $\widetilde{\mathrm{AX}}(P) = \neg\mathrm{AX}(\neg P)$ où l'opérateur $\neg$ dénote l'opération de complément.

Question 5 *Calculer le cardinal des ensembles $\widetilde{EX}(A)$ et $\widetilde{AX}(A)$. Que remarquez-vous ?*

2 Les opérateurs EU, AU

Soient P, Q deux ensembles de sommets. Soient (X_n), (Y_n) les suites récurrentes d'ensembles de sommets définies par :

$$\begin{array}{rclcrcl} X_{n+1} & = & X_n \cup (\mathrm{EX}(X_n) \cap P) & , & X_0 & = & Q \\ Y_{n+1} & = & Y_n \cup (\mathrm{AX}(Y_n) \cap P) & , & Y_0 & = & Q \end{array}$$

On remarquera que les suites (X_n) et (Y_n) sont croissantes et bornées par S. On pose $\mathrm{EU}(P, Q) = \lim_{n \to +\infty} X_n$ et $\mathrm{AU}(P, Q) = \lim_{n \to +\infty} Y_n$.

Question 6 *Donner une description concise des algorithmes d'évaluation des opérateurs de EU et AU. Donner leurs complexités en fonction de N. Calculer le cardinal des ensembles $EU(B, A)$, $AU(B, A)$, $EU(S, B)$, $AU(S, B)$.*

Pour $u \in S$, on pose $\text{QEU}(P,Q)(u) = \inf(\{n|u \in X_n\} \cup \{+\infty\})$ et $\text{QAU}(P,Q)(u) = \inf(\{n|u \in Y_n\} \cup \{+\infty\})$. Nous coderons le résultat des opérations QEU et QAU par un vecteur de N entiers.

Question 7 *Donner une description concise des algorithmes d'évaluation des opérateurs de QEU et QAU. Vous justifierez votre choix de codage de $+\infty$ par un entier. Donner leurs complexités en fonction de N. Pour chacune des quatre fonctions $QEU(B,A)$, $QAU(B,A)$, $QEU(S,B)$, $QAU(S,B)$, donner le cardinal des ensembles des sommets d'image 0, 1, 2, 3 et $+\infty$ (c-à-d, 20 résultats).*

Question 8 *Est-il possible de coder les opérateurs EU, AU, QEU, QAU par des algorithmes de complexité $O(N^2)$? Pour chacun des opérateurs, vous donnerez une description concise de l'algorithme, ou des arguments contre son existence.*

3 Indiscernabilité

Soit L une relation d'équivalence sur S ($L \subseteq S \times S$). Soit P un ensemble de sommets. Nous dirons que L est compatible avec P ssi $\forall u,v \in S : u \in P \wedge L(u,v) \Rightarrow v \in P$. Posons $\Delta(P) = \{(u,v) \in S \times S | u \in P \Leftrightarrow v \in P\}$. On peut montrer que $L \cap \Delta(P)$ est la plus grande relation d'équivalence incluse dans L et compatible avec P.

Nous coderons une relation d'équivalence L par un tableau de N entiers : $L[u]$ est le sommet le plus petit de la classe d'équivalence contenant u. On remarquera que la relation $S \times S$ est codée par un tableau dont toutes les valeurs sont nulles.

Question 9 *Donner une description concise de algorithmes de calcul de $L \cap \Delta(P)$. Donner sa complexité en fonction de N. Posons $L_0 = S \times S$, $L_{i+1} = L_i \cap EX^i(A)$. Calculer le nombre de classes d'équivalences des relations L_i, pour $i = 1, \ldots, 10$. Que remarquez-vous ?*

Nous dirons que L est compatible avec le graphe G ssi pour toute classe d'équivalence C de L, L est compatible par rapport à $EX(C)$. L'algorithme de la plus grande relation incluse dans L et compatible avec G, repose sur les règles de calcul suivantes :
– initialiser l'algorithme avec L,
– si L n'est pas compatible avec une classe C, remplacer L par $L \cap \text{EX}(C)$,
– si L est compatible par rapport G, L est la relation recherchée.
Nous noterons cette relation $L_{/G}$.

Question 10 *Donner une description concise de algorithme de calcul de $L_{/G}$. Donner sa complexité en fonction de N. Calculer le nombre de classes d'équivalences des relations $\Delta(A)_{/G}$, $\Delta(B)_{/G}$ et $(\Delta(A) \cap \Delta(B))_{/G}$.*

Soit L une relation compatible avec G. Le graphe quotient $G_{/L} = (S_{/L}, R_{/L})$ est un graphe dont les sommets sont les classes d'équivalences, et dans lequel un arc relie la classe C à la classe D ssi $C \cap EX(D) \neq \emptyset$.

Question 11 *Définir une structure de données permettant de coder un graphe quotient. Donner une description concise de algorithme de $G_{/L}$. Donner sa complexité en fonction de N. Calculer le nombre d'arcs des graphes quotients $G_{\Delta(A)_{/G}}$, $G_{\Delta(B)_{/G}}$ et $G_{(\Delta(A)\cap\Delta(B))_{/G}}$.*

Soit L une relation compatible avec un ensemble de sommets P. Soit $P_{/L}$ l'ensemble des classes de L dont tous les sommets sont dans P.

Question 12 *Soit $L = (\Delta(A) \cap \Delta(B))_{/G}$. Calculer sur le graphe quotient G_L, le cardinal des ensembles $EX(A_{/L})$, $AX(B_{/L})$, $AX(EX(B_{/L}))$, $EX(AX(B_{/L}))$, $EU(B_{/L}, A_{/L})$, $AU(B_{/L}, A_{/L})$, $EU(S_{/L}, B_{/L})$, $AX(S_{/L}, B_{/L})$.*

On peut montrer que si L une relation compatible avec G et avec les ensembles de sommets P et Q, alors L est compatible avec les ensembles $\mathrm{EX}(P)$, $\mathrm{AX}(P)$, $\mathrm{EU}(P, Q)$ et $\mathrm{AU}(P, Q)$; de plus, nous avons les identités suivantes : $\mathrm{EX}(P_{/L}) = \mathrm{EX}(P)_{/L}$, $\mathrm{AX}(P_{/L}) = \mathrm{AX}(P)_{/L}$, $\mathrm{EU}(P_{/L}, Q_{/L}) = \mathrm{EU}(P, Q)_{/L}$ et $\mathrm{AU}(P_{/L}, Q_{/L}) = \mathrm{AU}(P, Q)_{/L}$.

Question 13 *Donner une méthode et décriver des algorithmes qui permettent de vérifier les identités ci-dessus sur les ensembles de la question 12.*