Concours commun des écoles normales supérieures
Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation

Les ascenseurs

Durée de l'épreuve : 4 heures

Juillet 2004

Note. Lorsque la description d'un algorithme est demandée, celle-ci doit être courte et précise. Quand on demande la complexité d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande un ordre de grandeur du temps de calcul dans le cas le pire, par exemple $O(n^2)$ ou $O(n \log n)$.

Le problème des ascenseurs. Ce problème est consacré à la conception d'algorithmes optimisant le trajet d'un ensemble d'ascenseurs soumis à diverses contraintes.

Les ascenseurs réagissent aux actions des utilisateurs (qu'on va appeler *passagers*). On suppose que chaque passager a le comportement suivant : à un instant donné, le passager arrive sur le palier et appuie le bouton d'appel, qui est commun à tous les ascenseurs ; dès que l'ascenseur s'arrête à l'étage, le passager y rentre et appuie sur le bouton de sa destination ; dès que l'ascenseur s'arrête à sa destination, le passager en sort.

La section 1 définit les données du problème. Les sections 2 et 3 sont indépendantes.

1 Préliminaires

On utilisera la suite (pseudo-aléatoire) d'entiers positifs (u_n) définie ci-dessous.

- u_0 est donné sur votre table. **(À reporter en haut de votre copie !)**
- $u_n = (16217 \times u_{n-1}) \bmod 59207$, pour $n > 0$.

Question 1 *Que valent u_{992} et u_{9992} ?*

2 Le comportement des passagers

On utilise un temps discret, où les instants sont numérotés par des entiers. La suite de quadruplets (c_i, i, x_i, y_i) indique pour le i-ième passager quel est l'instant où il appelle l'ascenseur, quel est l'étage de départ et quel est l'étage d'arrivée. On note n le nombre de passagers. On note T la durée de la période considérée. Le nombre d'étages est m. Les étages sont numérotés de 0 à $m - 1$.
On répondra aux questions pour les deux jeux de paramètres suivants : premier jeu $T = 100$, $n = 10$ et $m = 100$; second jeu $T = 1000$, $n = 100$ et $m = 10$.

Question 2 *On définit* $c_i = u_{3i} \bmod T$, $x_i = u_{3i+1} \bmod m$ *et* $y_i = u_{3i+2} \bmod m$ *pour* $i = 1...n$.
Quelles sont les valeurs c_i, x_i, y_i *pour* $i = 1...5$ *?*
Combien y a-t-il de passagers tels que $x_i = y_i$ *?*

On appelle $\mathcal{P}$ l'ensemble des quadruplets tels que $x_i \neq y_i$.

Question 3 *Si on trie* $\mathcal{P}$ *selon l'ordre lexicographique, quels sont les cinq premiers éléments ?*

3 Le comportement d'un ascenseur

On définit la vitesse v d'un ascenseur à un instant t comme le nombre d'étages parcourus entre t et $t+1$. Tout ascenseur a quatre caractéristiques "physiques" : w (waiting time), v_{max} (vitesse maximale), f (freinage) et a (accélération). Pour éviter les problèmes d'arrondis, on suppose que w et t sont des entiers et que toutes les autres valeurs (v, v_{max}, f et a) sont des multiples de $1/10$.
Précisément, v_{max} est un majorant de la vitesse, et les valeurs a et f indiquent la variation maximale de vitesse entre deux instants successifs. De plus, l'ascenseur doit s'arrêter avant de changer de direction. Autrement dit, si on note p_t la position de l'ascenseur à l'instant t et $v_t = p_{t+1} - p_t$ la vitesse entre l'instant t et l'instant $t+1$, on a pour tout t, $|v_t| \leq v_{max}$, $v_{t-1}v_t \geq 0$ et $-f \leq |v_t| - |v_{t-1}| \leq a$. Quant à w, c'est le nombre minimal d'instants où l'ascenseur reste à vitesse 0 à un étage, s'il y doit y ouvrir ses portes pour laisser entrer et sortir des passagers.

Question 4 *Supposant* $v_{max} = +\infty$*, quelle est la formule qui donne le nombre (éventuellement fractionnaire) d'étages que parcourt en temps* t *un* *ascenseur qui ne fait que freiner à fond et s'arrêter, la vitesse initiale étant arbitraire.*

Question 5 *En déduire une formule qui donne le temps minimal (nombre entier fonction de d et f) pour parcourir une distance d et finir à l'arrêt, la vitesse initiale étant arbitraire.*

Question 6 *Décrivez et programmez une fonction qui, à partir de la valeur de f et de la distance d qu'on voudrait parcourir, calcule la vitesse initiale minimale parmi celles qui permettent de parcourir d en un temps minimal.*

Nous considérerons dans la suite du problème cinq types d'ascenseurs.
L'*ascenseur rapide* a $w = 10$ et $v_{max} = a = f = 1$.
L'*ascenseur lent* a $w = 10$ et $v_{max} = a = f = 1/5$.
L'*ascenseur progressif* a $w = 10$, $v_{max} = 1$ et $a = f = 1/5$.
L'*ascenseur sportif* a $w = 2$, $v_{max} = 2$, $a = 1/5$ et $f = 1/2$.
L'*ascenseur dangereux* a $w = 5$, $v_{max} = 2$, $a = 1/2$ et $f = 1/5$.
On supposera qu'un ascenseur qui cherche à aller à un étage à distance d ajuste sa vitesse selon la technique décrite dans la question 6 ci-dessus.

Question 7 *Dans cette question, le temps d'ouverture-fermeture des portes est négligé (i.e. $w = 1$). Supposons qu'au temps $t_0 = 0$ l'ascenseur est à l'étage 0, et est appelé à l'étage 5, et qu'au temps $t_1 = 10$ il est appelé à l'étage 1. Pour chacun des types d'ascenseurs décrits ci-dessus, quelle est la position de l'ascenseur au temps $t_2 = 15$?*
Expliquez quel est votre algorithme. N'oubliez pas de tenir compte des contraintes d'accélération, de freinage et de vitesse maximale.

On note $\bar{u}_i = u_i \bmod m$.

Question 8 *Supposons qu'au temps $t_0 = 0$ l'ascenseur est à l'arrêt à l'étage 0, est disponible pour partir immédiatement, et est appelé à l'étage $\bar{u}_1$. Une fois arrivé à cet étage il laisse entrer et sortir des passagers, pour repartir à l'instant t_1, appelé à l'étage $\bar{u}_1$, etc. Pour chacun des types d'ascenseurs décrits ci-dessus, quelles sont les valeurs de t_1, t_{10} et t_{1000} ?*
Expliquez quelle technique vous utilisez pour calculer les déplacements de l'ascenseur. Attention : quelque soit la longueur d'une séquence $\bar{u}_i = \bar{u}_{i+1} = ... = \bar{u}_{i+...}$, l'ascenseur reste seulement w instants à cet étage.

Question 9 *Pour vérifier en partie les résultats obtenus à la question 8, montrez que pour les ascenseurs tels que $v_{max} = a = f$ la valeur t_i/i (où t_i*

est défini à la question 8) vaut environ

$$\left(w + \frac{m+1}{3v_{max}}\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

4 Performance d'un algorithme de gestion d'un ascenseur

On étudie ici différentes stratégies de programmation des ascenseurs.
On rappelle que chaque passager a le comportement suivant : à un instant donné, le passager arrive sur le palier et appuie le bouton d'appel, qui est commun à tous les ascenseurs ; dès que l'ascenseur s'arrête à l'étage, le passager y rentre et appuie sur le bouton de sa destination ; dès que l'ascenseur s'arrête à sa destination, le passager en sort. NB : l'ascenseur et chaque palier peut contenir un nombre quelconque de passagers.

Pour chaque question, on donnera la réponse pour chacun des types d'ascenseur (définis plus haut), en réaction au comportement des passagers (défini par l'ensemble $\mathcal{P}$). On suppose qu'au temps 0 l'ascenseur est à l'étage 0 et on étudie le comportement de l'ascenseur jusqu'au moment où tous les passagers sont arrivés à bon port.
Le temps qui sert à mesurer l'*insatisfaction* d'un passager est le temps écoulé entre l'instant où il appuie sur le bouton d'appel et l'instant où il sort de l'ascenseur. Pour le calcul d'instatisfaction, on suppose que le passager sort de l'ascenseur dès l'instant où celui-ci est arrêté à l'étage de destination. La performance d'un algorithme de gestion d'ascenseur est mesurée par l'*insatisfaction totale*, qui est la somme des insatisfactions.

Un ascenseur contrôlé par l'algorithme A se dirige en priorité vers l'étage demandé par le passager le plus ancien (selon l'ordre lexicographique sur $\mathcal{P}$). Une fois arrivé à destination, l'ascenseur choisit sa nouvelle destination de la même façon.
Autrement dit, cet algorithme ne tient pas compte du fait qu'un passager est sur le palier ou dans l'ascenseur. Il ne s'intéresse qu'aux étage où il est appelé, et au rang de priorité des appelants, le rang de priorité étant défini par l'ordre lexicographique sur $\mathcal{P}$.

Question 10 *Décrivez brièvement comment vous avez programmé l'algorithme A. Quelle est sa performance pour chacun des types d'ascenseur décrits ?*

Un ascenseur contrôlé par l'algorithme B donne priorité aux demandes des passagers qui sont dans l'ascenseur, dans l'ordre dans lequel les demandes ont été faites, puis s'il est vide il satisfait les demandes d'appel par les passagers attendant aux étages, dans l'ordre dans lequel elles ont été faites. On suppose que si plusieurs passagers montent simultanément dans l'ascenseur, ils font leurs demandes en respectant l'ordre dans lequel ils ont fait les appels. Autrement dit, les premiers arrivés sur le palier seront les premiers à appuyer sur le bouton à l'intérieur de l'ascenseur.

Question 11 *Décrivez brièvement comment vous avez programmé l'algorithme B. Quelle est sa performance pour chacun des types d'ascenseur décrits ?*

Un ascenseur contrôlé par l'algorithme C fait systématiquement des aller-retours entre l'étage du haut et l'étage du bas, en s'arrêtant à chaque étage et en ouvrant les portes s'il y a quelqu'un sur le palier ou si quelqu'un veut descendre.

Question 12 *Décrivez brièvement comment vous avez programmé l'algorithme C. Quelle est sa performance pour chacun des types d'ascenseur décrits ?*