Concours commun des écoles normales supérieures
Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation

Halma

Sujet et éléments de correction

Juillet 2004

Note. Lorsque la description d'un algorithme est demandée, celle-ci doit être courte et précise. Quand on demande la complexité d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande un ordre de grandeur du temps de calcul dans le cas le pire, par exemple $O(n^2)$ ou $O(n \log n)$.

Des indications et des éléments de correction du sujet sont ajoutés dans la marge.

1 Description du problème

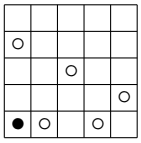
Le jeu de Halma. Ce problème est consacré à la conception d'algorithmes jouant au jeu de Halma. C'est un jeu de plateau datant de l'époque victorienne, se jouant sur un plateau carré quadrillé.

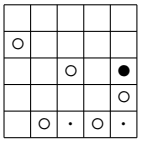
Règle de victoire. Dans ce problème, on s'intéresse au jeu de Halma à un seul joueur, avec un plateau carré de taille arbitraire n et un nombre de pions arbitraire p. On appelle *configuration* du jeu la position des pions.
La distance d'un pion se situant sur la case (x, y) est par définition $x + y$.
La mesure de l'*insatisfaction* d'une configuration des pions sur le plateau de jeu est la somme des distances des pions. Si l'insatisfaction d'une configuration est minimale parmi toutes les configurations ayant le même nombre de pions, on dit que la configuration est *rangée*. Le but de ce problème est de trouver des algorithmes permettant d'arriver à une configuration rangée, de préférence en minimisant le nombre de coups entre la configuration de départ et cette configuration d'arrivée.

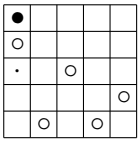
Règles de déplacement des pions. À chaque coup, on déplace un pion. Plusieurs types de déplacements sont possibles.
On peut choisir de déplacer un pion vers l'une des quatre cases voisines, si celle-ci est libre.
Un pion peut aussi être déplacé par une succession de *petits sauts*. On définit un *petit saut* comme un déplacement de deux cases, dans l'une des quatre directions. Ce déplacement est autorisé si la case d'arrivée est libre, et si la case intermédiaire est occupée. Contrairement aux dames, le pion par dessus lequel on saute reste sur le plateau de jeu. Une succession de petits sauts, en nombre arbitraire, est considéré comme un unique coup.

Il y a ici une ambiguïté remarquée par un seul candidat. Le sujet aurait dû préciser qu'on n'autorise pas un déplacement dont la case d'arrivée est celle de départ.

Une règle optionnelle permet non seulement de faire de petits sauts (définis ci-dessus) mais aussi de *grands sauts*. Un grand saut est un déplacement d'un nombre pair de cases dans l'une des quatre directions, tel que la case au milieu de ce trajet soit occupée, et toutes les autres soient libres.


Exemple de déplacement par petits sauts


Exemple de déplacement par grands sauts



Organisation du problème. Dans la section 2 on étudie quelques propriétés des configurations rangées. Dans la section 3 on définit une configuration de départ. Ces deux sections sont indépendantes. Dans la section 4 on étudie comment, à partir d'une configuration donnée, choisir un déplacement de pion qui diminue le plus possible l'insatisfaction. Cette section ne dépend que partiellement des résultats de la section 2. Dans la section 5 on construit des algorithmes de rangement utilisant les techniques de la section précédente.

Rappel sur la représentation de tableaux bidimensionnels. On peut représenter les tableaux bidimensionnels dans des tableaux simples. Par exemple, pour un tableau de dimension n, on peut représenter l'élément de coordonnées (x, y) par `T[x+n*y]`.

2 Préliminaires : configurations rangées

Dans cette section, la taille du plateau est arbitrairement grande. Autrement dit, les pions peuvent être sur toute case de coordonnées (x, y) avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$. On étudie quelques propriétés élémentaires des configurations rangées.

Question 1 *Montrez que dans une configuration rangée avec p pions, la distance du pion le plus loin est* $\min\{k | \frac{(k+1)(k+2)}{2} \geq p\}$.

Question 2 *Décrire comment calculer l'insatisfaction d'une configuration rangée à p pions. Quelle est la complexité de votre algorithme en fonction de p ? Quelle est l'insatisfaction d'une configuration rangée à 1000 pions ?*

L'algorithme qui permet de répondre à la **question 2** peut être en $\mathcal{O}(p^2)$, $\mathcal{O}(p)$, $\mathcal{O}(\sqrt{p})$ ou $\mathcal{O}(1)$. Toutes ces solutions ont été proposées par des candidats.

Question 3 *Montrez que si le nombre de pions n'est pas un entier de la forme $\frac{k(k-1)}{2}$ alors il y a plusieurs configurations rangées.*

Pour la **question 3** il n'est pas nécessaire de calculer le nombre de configurations rangées, mais exhiber un exemple ne suffit pas.

3 Préliminaires : configuration de départ

On utilisera la suite (pseudo-aléatoire) d'entiers positifs (u_n) définie ci-dessous.
– u_0 est donné sur votre table. **(À reporter en haut de votre copie !)**
– $u_n = (16383 \times u_{n-1}) \bmod 59047$, pour $n > 0$.

Question 4 *Que valent u_{992} et u_{9992} ?*

Dans la suite du problème, on s'intéressera aux cas où le couple (n, p) est pris dans l'ensemble $\mathcal{E} = \{(4, 6), (6, 10), (15, 20), (25, 10)\}$, et aux deux variantes du jeu. La *configuration de départ* est définie en plaçant p pions selon l'algorithme ci-dessous : on pose $(x_i, y_i) = (u_{2i} \bmod n, u_{2i+1} \bmod n)$; les positions initiales des p pions sont les p premières valeurs distinctes de la suite (x_1, y_1), (x_2, y_2), ...
On remarque que le premier pion posé sur le plateau a donc pour coordonnées (x_1, y_1), mais que le p-ième pion posé a pour coordonnées (x_π, y_π) pour une valeur $\pi \geq p$.

Question 5 *Pour chaque choix de paramètres $(n, p) \in \mathcal{E}$, quelles sont la valeur π et les coordonnées (x_π, y_π) ?*

Il ne faut pas oublier de répondre à la **question 5** avec π **et** (x_π, y_π). Il faut faire attention aux indices : on commence par (x_1, y_1) et non (x_0, y_0).

On rappelle que selon les règles du jeu, un pion peut se déplacer vers une case voisine, ou bien faire une succession de (petits ou grands) sauts. On pourrait imaginer de n'autoriser que des sauts. La question suivante montre que cela restreindrait beaucoup le déplacement des pions.

Question 6 *Montrez que si un pion ne se déplace que par sauts, il y a trois quarts des cases du damier auxquelles il n'a pas accès, indépendamment de la position des autres pions. Cette propriété définit une partition de l'ensemble des cases du damier en quatre parties. Donnez une définition caractérisant ces quatre parties, et donnez (pour la configuration de départ définie ci-dessus) le nombre de pions dans chaque partie ainsi définie.*

Pour la **question 6**, il suffit de remarquer qu'un saut conserve la parité des coordonnées. Certains candidats n'ont pas vérifié que la somme des nombres de pions des quatre parties doit être p.

4 Étude d'un coup

Dans cette section, on étudie la configuration de départ, pour savoir quel déplacement choisir. On étudie donc les coups possibles, et leur effet sur le rangement du plateau (variation de l'insatisfaction). On donnera les résultats pour les deux variantes du jeu (petits sauts ou grands sauts) et toutes les valeurs $(n, p) \in \mathcal{E}$.

Question 7 *Quelle est l'insatisfaction de la configuration de départ ? Décrivez l'algorithme que vous avez utilisé et sa complexité en fonction de n et p.*

La **question 7** a permis à certains de penser à un algorithme de calcul d'insatisfaction meilleur que le parcours en $\mathcal{O}(n^2)$ du plateau : le parcours en $\mathcal{O}(p)$ de la liste des positions des pions. On pouvait en déduire l'intérêt d'utiliser une structure de données redondante, stockant simultanément l'état des cases et la position des pions.

Question 8 *À partir de la configuration de départ, si on choisit de déplacer le pion de coordonnées (x_1, y_1), combien de cases peut-il atteindre en un coup ?*
Décrivez l'algorithme que vous avez utilisé et sa complexité en fonction de n.

Pour la **question 8**, un algorithme naturel revient à considérer les cases du damier comme les sommets d'un graphe, que l'on parcourt en marquant les sommets visités. Dans la variante "petits sauts" la recherche des arêtes sortantes se fait en temps constant : il suffit de regarder les cases voisines et, pour celles qui sont occupées la case d'après. La complexité de cet algorithme est $\mathcal{O}(n^2)$, et on peut exhiber un cas où cette borne est atteinte : toutes les cases de coordonnées impaires occupées et le pion en $(0, 1)$. La variante "grands sauts" apparaît plus lente car l'énumération des sauts possibles à partir d'une position prend un temps $\mathcal{O}(n)$, ce qui donnerait un majorant $\mathcal{O}(n^3)$. On n'attendait pas de meilleure majoration, même si est possible de montrer que pour cette variante aussi l'algorithme d'énumération des coups possibles prend un temps $\mathcal{O}(n^2)$.

Question 9 *À partir de la configuration de départ, combien y a-t-il de coups possibles (un coup étant défini par la position de départ et la position d'arrivée du pion qu'on déplace) ? Décrivez l'algorithme que vous avez utilisé et sa complexité en fonction de n et p.*

L'algorithme de la **question 9** a donc une complexité $\mathcal{O}(n^2 p)$.

Choix du meilleur coup. On définit deux ordres totaux sur les cases du plateau : l'ordre $\prec_L$ est l'ordre lexicographique et l'ordre $\prec_D$ celui des distances. Formellement :
– $(a, b) \prec_L (c, d) \Leftrightarrow a < c$ ou $(a = c$ et $b < d)$
– $(a, b) \prec_D (c, d) \Leftrightarrow a + b < c + d$ ou $(a + b = c + d$ et $a < c)$
Parmi toutes les configurations accessibles en un coup, certaines ont une insatisfaction minimale. Le "meilleur coup" est donc l'un de ceux-là. Si plusieurs réponses sont possibles, on utilise l'un des ordres définis ci-dessus. Le meilleur coup selon l'ordre $\prec$ est celui qui fait bouger le pion dont la case est la plus grande selon l'ordre $\prec$, et parmi les déplacements de ce pion celui pour lequel la case d'arrivée est la plus grande selon l'ordre $\prec$.

Question 10 *Décrivez un algorithme qui à partir d'une configuration donnée, calcule le meilleur coup selon l'ordre des distances. Quelle est la complexité de votre algorithme en fonction de n et p. Quel est son résultat pour la configuration de départ, pour chaque choix de paramètres $(n, p) \in \mathcal{E}$.*

Un algorithme répondant à la **question 10** trie la liste des pions par ordre $\prec_D$ décroissant, puis la parcourt en calculant pour chacun la liste des coups possibles (répertoriés par leur case d'arrivée). Dans cette liste on sélectionne parmi les plus proches de l'origine celui dont la première coordonnée est la plus grande. Si la diminution d'insatisfaction causée par ce coup est strictement meilleure que celle du coup gardé en mémoire, il le remplace. Puis on prend le pion suivant dans la liste.
On initialise l'algorithme avec une diminution d'insatisfaction -2, ce qui permet à l'algorithme de ne pas échouer si tous les coups augmentent l'insatisfaction.

5 Algorithmes de résolution du problème

On se base sur l'algorithme glouton, qui cherche à chaque coup à minimiser l'insatisfaction. Plusieurs variantes de l'algorithme glouton sont possibles, selon la façon dont on choisit le coup parmi ceux qui minimisent l'insatisfaction à l'étape suivante.

NB : on donnera les résultats pour les deux variantes du jeu et toutes les valeurs (n, p).

Dans l'algorithme A, si plusieurs coups minimisent autant l'insatisfaction, on choisit le meilleur coup selon l'ordre $\prec_D$.

Question 11 *Après combien de coups cette variante de l'algorithme glouton s'arrête-t-elle ? Quelle est l'insatisfaction à la fin ?*

Les **questions 11 et 12** sont simples dès que les algorithmes des questions précédentes, et en particulier de la question 10, ont été programmés de façon modulaire.

Dans l'algorithme A, si plusieurs coups minimisent autant l'insatisfaction, on choisit le meilleur coup selon l'ordre $\prec_L$.

Question 12 *Après combien de coups cette variante de l'algorithme glouton s'arrête-t-elle ? Quelle est l'insatisfaction à la fin ?*

On remarque que les algorithmes ci-dessus arrivent rarement à une configuration rangée. Il faut donc trouver un algorithme de résolution de fin de partie. Pour cela, on commence par définir un *déplacement en diagonale* : c'est une succession de deux coups, le premier vers une case voisine, et le second vers une case voisine et dans une direction orthogonale à la première. On peut remarquer que certains déplacements en diagonale ne changent pas l'insatisfaction.
On propose l'algorithme suivant (algorithme C) : à partir d'une configuration où il existe un coup qui diminue l'insatisfaction, on applique l'algorithme A. À partir d'une configuration X où aucun coup ne diminue l'insatisfaction, on choisit le plus grand des pions (dans l'ordre $\prec_D$) tel que, après une succession de déplacements en diagonale ne changeant pas l'insatisfaction, il est possible en un coup d'obtenir une insatisfaction plus faible que celle de la configuration X.

La preuve de l'algorithme C est simple dès qu'on a prouvé qu'à partir de toute configuration non rangée il existe un pion qu'on peut rapprocher de l'origine par des déplacements en diagonale suivis d'un déplacement vers l'origine. La **question 13** est légèrement ambiguë car elle spécifique quel pion de la configuration X est déplacé, mais pas quel succession de déplacements est choisi. Par analogie avec la façon dont les autres algorithmes choisissent la case d'arrivée du pion déplacé, on pouvait choisir la plus grande selon $\prec_D$ de celle qui diminuent le plus l'insatisfaction. On pouvait aussi choisir parmi les successions de déplacement diminuant l'insatisfaction l'une de celles faisant le moins de coups, et s'il y en a plusieurs celle dont la case d'arrivée est la plus grande selon $\prec_D$.

Question 13 *Montrer que l'algorithme C arrive toujours à une configuration rangée. En combien de coups range-t-il le plateau, à partir des configurations de départ définies plus haut ?*

L'algorithme D généralise les algorithmes A et B de la façon suivante : si plusieurs coups minimisent autant l'insatisfaction, on les choisit simultanément, et on élimine dans l'arbre des exécutions possibles les branches pour lesquelles il existe une autre branche qui à la même profondeur (mesurée en nombre de coups) a une insatisfaction strictement plus faible.

L'algorithme D se base sur une variante de l'algorithme de la question 10, qu'on va appeler D0, et qui a pour résultat la liste des coups minimisant l'insatisfaction. L'algorithme D commence avec une liste l_0 de configurations contenant un seul élément : la configuration de départ. À chaque étape, il construit une nouvelle liste l_{i+1} qui réunit toutes les configurations obtenues par l'algorithme D0 à partir des éléments de la liste l_i. Il ne garde dans l_{i+1} que les configurations d'insatisfaction minimale.

Question 14 *Après combien de coups cette variante de l'algorithme glouton s'arrête-t-elle ? Quelle est l'insatisfaction à la fin ?*