TD0. Codages sur $\mathbb{N}$

On note (dans ce TD) $\mathbb{N}^{<\omega}$ l'ensemble des suites finies à valeurs entières.

Exercice 1 *introduction*

Montrer que $\mathbb{N}^{<\omega}$ est dénombrable.

En 1923, Fueter et Pólya ont démontré qu'il existe exactement deux polynômes à deux variables de degré deux à coefficients réels induisant une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 2 *ordre et progrès*

1. Trouver ces deux polynômes, appelés parfois « fonctions de couplage de Cantor ». Chacun de ces polynômes induit un ordre sur $\mathbb{N}^2$, de part sa bijection avec $\mathbb{N}$. Exprimer ces deux ordres.

À partir de maintenant on note χ celui de ces deux polynômes vérifiant $\chi(0,1) = 1$ et (Π_1, Π_2) la bijection réciproque de χ.

2. Montrer que $\Pi_i(x) \leq x$. Etudier les cas d'égalité.

Exercice 3 *plantons des arbres*

1. Soit $p, s \in \mathbb{N}$. Calculer le nombre de p-uplets $(x_1, ..., x_p)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \leq s.$$

Exercice 4 *bijections à la chaîne*

Soit $\eta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ une bijection. On définit par induction sur $p \geq q$ des fonctions

$$\eta_p : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} \eta_1 = id_{\mathbb{N}} \\ \eta_{p+1}(x_1, ..., x_{p+1}) = \eta(\eta_p(x_1, ..., x_p), x_{p+1}) \end{cases}$$

On note λ la suite vide. On définit une fonction $\sigma_\eta : \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \sigma_\eta(\lambda) = 0 \\ \sigma_\eta(\langle x_1, ..., x_p \rangle) = \eta(p-1, \eta_p(x_1, ..., x_p)) + 1 \text{ si } p \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que σ_η est une bijection de $\mathbb{N}^{<\omega}$ dans $\mathbb{N}$.

2. Montrer que la restriction de σ_χ à $\mathbb{N}^p$ s'exprime par un polynôme de degré 2^p.

Soit

$$\xi : \begin{pmatrix} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (i,j) & \mapsto & 2^i(2j+1) - 1 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que ξ est une bijection.

On note $(\Pi_{p,1}, ..., \Pi_{p,p})$ la bijection réciproque de ξ_p.

4. Montrer que $\Pi_{p,i}(x) \leq x \; \forall i \in \{1, ..., p\}$. En quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 5 *un peu de mesure*

Soit P un polynome de degré q, à p variables et à coefficients réels. Montrer que si P établit une bijection de $\mathbb{N}^p$ sur $\mathbb{N}$, alors $q \geq p$.

Exercice 6 *fonctions rigolotes*

Soit $\mathcal{F}$ une famille dénombrable d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe une application $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dominant toute fonction de $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire : pour tout $f \in \mathcal{F}$, $f = O_{+\infty}(\alpha)$).

2. Montrer qu'il existe une application croissante $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :
- aucune fonction de $\mathcal{F}$ ne domine β, et
- aucune fonction de $\mathcal{F}$ tendant vers $+\infty$ n'est dominée par β.