TD3. Fonctions récursives primitives

Exercice 1 *Echauffement*

Montrer que les fonctions suivantes sont récursives primitives :

1. $\mathrm{plus}(n, m) = n + m$

2. $\mathrm{pred}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{sinon} \end{cases}$

3. $\mathrm{moins}(n, m) = \max(0, n - m)$

4. $\mathrm{prod}(n, m) = n * m$

5. $\mathrm{sgn}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 2 *Un peu d'exotisme*

1. Montrer que la fonction qui à n associe 1 si le chiffre 7 apparaît n fois consécutives dans l'écriture décimale de π et 0 sinon est récursive primitive.

2. Montrer que la fonction qui à n associe n^2 si n est pair, n^3 si n est impair est récursive primitive.

Exercice 3 *Prédicats et minimisation bornée*

1. Montrer que les prédicats $\mathrm{egal}(n, m)$ $(n = m)$ et $\inf(n, m)$ $(n < m)$ sont récursifs primitifs.

2. Soit P un prédicat récursif primitif, g et h des fonctions récursives primitives de même arité que P. Montrer que la fonction f définie par

$$f(\overline{n}) = \begin{cases} g(\overline{n}) & \text{si } P(\overline{n}) = 0 \\ h(\overline{n}) & \text{sinon} \end{cases}$$

est récursive primitive.

3. Soit Q un prédicat récursif primitif. Montrer que la fonction suivante est récursive primitive

$$f(\overline{m}, n) = \begin{cases} \text{le plus petit } p, 0 \leq p \leq n, \text{ vérifiant } Q(\overline{m}, p) \text{ s'il existe} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

4. Montrer que les fonctions $\mathrm{div}(n, m)$ et $\mathrm{rem}(m, n)$ (le quotient et le reste de la division euclidienne de m par n) sont récursives primitives.

5. Soit Q un prédicat récursif primitif. Montrer que les prédicats

$$\begin{array}{rl} & \exists i \leq n,\ Q(i, \overline{m}) \\ \text{et} & \forall i \leq n,\ Q(i, \overline{m}) \end{array}$$

sont récursifs primitifs.

Exercice 4 *Ackermann*

Histoire d'être bien d'accord, on choisit comme définition de la fonction d'Ackermann :

$$\begin{cases} A(0,x) = x+1 \\ A(p,0) = p+1 \\ A(p+1,x+1) = A(p,A(p+1,x)) \end{cases}$$

1. Donner les expressions explicites de $A(1,x)$, $A(2,x)$, $A(3,x)$.

2. Que vaut $A(4,x)$?

3. Montrer que
- A est strictement croissante en chacune de ses variables ;
- $A(p+1,x) > x + A(p,x)$ pour $p \geq 1$;
- $A(p,x+1) \leq A(p+1,x)$ pour $x \geq 1$.

4. Montrer que pour toute fonction récursive primitive f, il existe p tel que,

$$\forall x_1,\ldots,x_k, \qquad \sup_{x_1,\ldots,x_k} f(x_1,\ldots,x_k) < A(p, \sup(x_1,\ldots,x_k))$$

5. En déduire que la fonction A n'est pas récursive primitive.

Exercice 5 *Itération*

1. Soit g une fonction récursive primitive. Montrer que la fonction

$$f \;:\; (n,x) \;\mapsto\; g^n(x)$$

est récursive primitive.

2. Soient g et h deux fonctions récursives primitives, montrer que la fonction f définie comme suit est récursive primitive :

$$\begin{array}{rcl} f(0,x) & = & h(x) \\ f(n+1,x) & = & f(n,g(x)) \end{array}$$