TD9. Complexité de Kolmogorov

Dans tout le TD, les mots considérés sont formés sur un alphabet à deux lettres. Rappelons une définition possible de la complexité de Kolmogorov :
Si U est un algorithme prenant en entrée des mots et renvoyant d'autres mots, la complexité de calcul de x par U est $K_U(x) = \min\{|y| \mid U(y) = x\}$. On dit alors qu'un algorithme U n'est pas plus mauvais qu'un autre algorithme V si $K_U(x) \leq K_V(x) + O(1)$. Il se trouve qu'il existe un algorithme U_{opt} qui n'est plus mauvais qu'aucun autre algorithme[1], et alors on notera $K = K_{U_{opt}}$. La complexité de Kolmogorov est donc ainsi définie à un $O(1)$ près, mais cela ne devrait pas poser problème.

Exercice 1 *Propriétés de base*
Montrer les propriétés suivantes

1. $K(x) \leq |x| + O(1)$

2. Il existe c tel que
$$2^{n-c} \leq \#\{x \mid K(x) \leq n\} \leq 2^{n+1}$$

3. Pour toute fonction calculable α, on a $K(\alpha(x)) \leq K(x) + O(1)$

4. $K(x.y) \leq K(x) + K(y) + \log(K(x)) + 2\log(\log(K(x)) + O(1)$

5. Il existe c tel que pour tout n, 99% des mots de longueur n ont une complexité comprise entre $n - c$ et $n + c$

6. Toute fonction calculable majorée par K est en réalité bornée (par une constante).

Exercice 2 *Un peu de récursivité*
On donne, pour chaque n, un ensemble de mots V_n de taille au plus 2^n et l'on suppose que la relation $\{(x, n) \mid x \in V_n\}$ est récursivement énumérable.

1. Montrer que les éléments de V_n ont une complexité au plus $n + O(1)$.

Exercice 3 *Euclide vs. Kolmogorov*

1. Montrer qu'il existe une constante c telle que,
$$\forall a_1, \dots a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{N}, \quad K(\prod a_i^{b_i}) \leq 2\sum K(a_i) + 2\sum K(b_i) + c$$

2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers (on pourra utiliser le résultat de la question 1.4).

Exercice 4 *Théorème d'incomplétude de Chaitin*
Soit T une théorie cohérente permettant de modéliser le fonctionnement des machines de Turing. On suppose que T est récursivement énumérable.

Montrer qu'il existe un entier c_T tel que tous les théorèmes de T de la forme "la complexité de Kolmogorov de x est supérieure à n" vérifient $n \leq c_T$.

[1] Considérons la preuve de ce fait comme l'exercice 0 de cette feuille.