Démonstration Automatique

Sylvain Conchon

Équipe Démons & Projet Proval
Université Paris-Sud

23 Janvier 2006

Construction d'un démonstrateur automatique dédié à la preuve de programmes

Plan

1. Motivations et démonstrations
2. Les briques de base
   - Logique propositionnelle : *SAT-solvers*
   - Traitement de l'égalité : l'algorithme de *Congruence Closure*
   - Arithmétique linéaire : la méthode de *Fourier-Motzkin*
3. Combinaison de procédures de décision

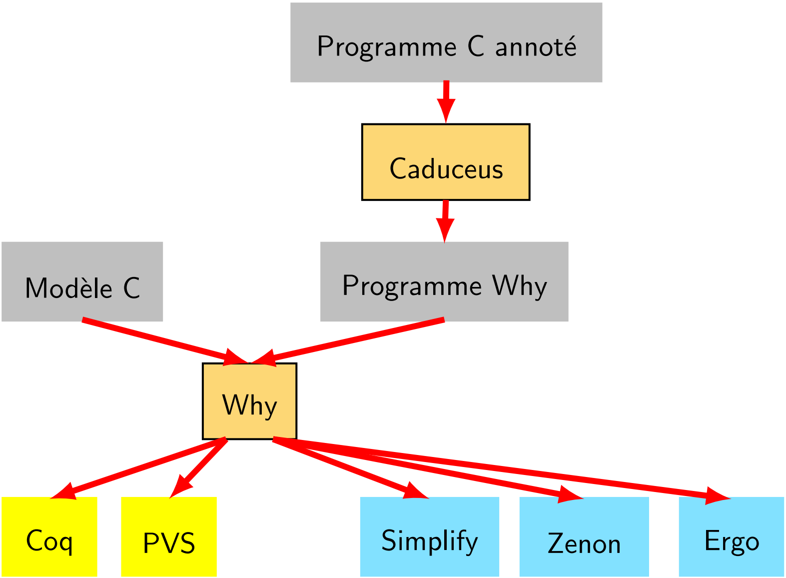
Motivations : la vérification de programme

La vérification de programmes est une activité aussi ancienne que celle de programmer :

Alan Turing, Checking a large routine (1949)

Des nombreux outils de **vérification automatique** sont aujourd'hui utilisés en entreprise. Dans le *hardware* (Intel par ex.) mais aussi pour le logiciel (Ariane5, Airbus etc.)

Motivations : exemple d'une chaîne de vérification



Motivations : un exemple simple

```
typedef struct purse { int balance ; } purse ;

void credit(purse *p,int s) {
  p→balance = p→balance + s ;
}

void withdraw(purse *p,int s) {
  p→balance = p→balance - s ;
}

purse *new_purse() {
  purse* p = (purse*) malloc(1 * sizeof(purse)) ;
  p→balance = 0 ;
  return p ;
}
```

Motivations : un exemple simple

```
int test() {
  purse *p1 = new_purse() ;
  purse *p2 = new_purse() ;
  credit(p1,100) ;
  credit(p2,200) ;
  withdraw(p1,50) ;
  withdraw(p2,100) ;
  return p1→balance + p2→balance ;
}
```

Motivations : un exemple simple avec annotations

```
//@ predicate purse_inv(purse *p) {\valid(p) && p->balance>=0}

typedef struct purse { int balance ; } purse ;

/*@ requires purse_inv(p) && s >= 0
  @ assigns p->balance
  @ ensures purse_inv(p) && p->balance == \old(p->balance) + s
  @*/

void credit(purse *p,int s) {
  p→balance = p→balance + s ;
}
```

Motivations : un exemple simple avec annotations

```
/*@ requires purse_inv(p) && 0 <= s <= p->balance
  @ assigns p->balance
  @ ensures purse_inv(p)&&p->balance==\old(p->balance)-s
  @*/

void withdraw(purse *p,int s) {
  p→balance = p→balance - s ;
}

/*@assigns \nothing
  @ensures \fresh(\result)&&purse_inv(\result)&&\result->balance==0
  @*/

purse *new_purse() {
  purse* p = (purse*) malloc(1 * sizeof(purse)) ;
  p→balance = 0 ;
  return p ;
}
```

Motivations : un exemple simple avec annotations

```
/*@ ensures \result == 150 @*/

int test() {
  purse *p1 = new_purse() ;
  purse *p2 = new_purse() ;
  credit(p1,100) ;
  credit(p2,200) ;
  withdraw(p1,50) ;
  withdraw(p2,100) ;
  return p1→balance + p2→balance ;
}
```

Motivations : un autre exemple

```
type α list
logic nil : α list
logic cons : α, α list → α list
logic hd : α list → α
logic tl : α list → α list
axiom a1: forall x:α. forall y:α list. hd(cons(x,y)) = x
axiom a2: forall x:α. forall y:α list. tl(cons(x,y)) = y

logic f : α → α
logic g : α , α → α
logic Q : α → prop
logic P : α , β , γ → prop
axiom a3: forall x,y:α. g(y,x) = y
axiom a4:
 forall x:α. forall y:β. forall t:γ. P(cons(x,y),x,t) → Q(t)
```

Motivations : un autre exemple (suite)

le but à prouver est :

```
goal g:
  forall a:int list.
  forall x, y: int.
  forall z,v:int.

  hd(cons(hd(f(a)),nil)) = g(g(y,x),x) →
  f(f(f(a)))=a → f(f(f(f(f(a)))))=a →
  x<=v+2 → v<=z+4 → z+6<=x →
  a=cons(x,cons(y,nil)) →
  P(a,y,z+x+4) → Q(x+v)
```

Motivations : solution

En effet...

1. $\texttt{f(f(f(a)))=a} \wedge \texttt{f(f(f(f(f(a)))))=a} \Rightarrow \texttt{f(a)=a}$

Motivations : solution

En effet...

1. `f(f(f(a)))=a` $\wedge$ `f(f(f(f(f(a)))))=a` $\Rightarrow$ `f(a)=a`
2. `axiom a3` $\Rightarrow$ `g(g(y,x),x)=y`

Motivations : solution

En effet...

❶ `f(f(f(a)))=a` $\wedge$ `f(f(f(f(f(a)))))=a` $\Rightarrow$ `f(a)=a`

❷ `axiom a3` $\Rightarrow$ `g(g(y,x),x)=y`

❸ `hd(cons(hd(f(a)),nil)) = g(g(y,x),x)` $\wedge$ ❶ $\wedge$ ❷ $\Rightarrow$
`hd(cons(hd(a),nil)) = y`

Motivations : solution

En effet...

1. `f(f(f(a)))=a` $\wedge$ `f(f(f(f(f(a)))))=a` $\Rightarrow$ `f(a)=a`
2. `axiom a3` $\Rightarrow$ `g(g(y,x),x)=y`
3. `hd(cons(hd(f(a)),nil)) = g(g(y,x),x)` $\wedge$ ❶ $\wedge$ ❷ $\Rightarrow$
   `hd(cons(hd(a),nil)) = y`
4. `axiom a1` $\wedge$ ❸ $\Rightarrow$ `hd(a) = y`

Motivations : solution

En effet...

❶ `f(f(f(a)))=a` $\wedge$ `f(f(f(f(f(a)))))=a` $\Rightarrow$ `f(a)=a`

❷ `axiom a3` $\Rightarrow$ `g(g(y,x),x)=y`

❸ `hd(cons(hd(f(a)),nil)) = g(g(y,x),x)` $\wedge$ ❶ $\wedge$ ❷ $\Rightarrow$
`hd(cons(hd(a),nil)) = y`

❹ `axiom a1` $\wedge$ ❸ $\Rightarrow$ `hd(a) = y`

❺ `axiom a1` $\wedge$ `a=cons(x,cons(y,nil))` $\wedge$ ❹ $\Rightarrow$ `x=y`

Motivations : solution

En effet...

➊ `f(f(f(a)))=a` $\wedge$ `f(f(f(f(f(a)))))=a` $\Rightarrow$ `f(a)=a`

➋ `axiom a3` $\Rightarrow$ `g(g(y,x),x)=y`

➌ `hd(cons(hd(f(a)),nil)) = g(g(y,x),x)` $\wedge$ ➊ $\wedge$ ➋ $\Rightarrow$
`hd(cons(hd(a),nil)) = y`

➍ `axiom a1` $\wedge$ ➌ $\Rightarrow$ `hd(a) = y`

➎ `axiom a1` $\wedge$ `a=cons(x,cons(y,nil))` $\wedge$ ➍ $\Rightarrow$ `x=y`

➏ `x<=v+2` $\wedge$ `v<=z+4` $\wedge$ `z+6<=x` $\Rightarrow$ `x-6=v` $\Rightarrow$ `x+v=z+x+4`

En effet...

❶ `f(f(f(a)))=a` ∧ `f(f(f(f(f(a)))))=a` ⇒ `f(a)=a`

❷ `axiom a3` ⇒ `g(g(y,x),x)=y`

❸ `hd(cons(hd(f(a)),nil)) = g(g(y,x),x)` ∧ ❶ ∧ ❷ ⇒ `hd(cons(hd(a),nil)) = y`

❹ `axiom a1` ∧ ❸ ⇒ `hd(a) = y`

❺ `axiom a1` ∧ `a=cons(x,cons(y,nil))` ∧ ❹ ⇒ `x=y`

❻ `x<=v+2` ∧ `v<=z+4` ∧ `z+6<=x` ⇒ `x-6=v` ⇒ `x+v=z+x+4`

❼ `axiom a4` ∧ `a=cons(x,cons(y,nil))` ∧ `P(a,y,z+x+4)` ∧ ❺ ∧ ❻ ⇒ `Q(x+v)`

Motivations : quelques outils existants

Prouver	Origine	langage	$\forall\exists$	sortes	$3x + y < 4$
Simplify	DEC/HP	Modula-3	$\surd$	$\oslash$	$\surd$
Yices	SRI	C++	$\surd$	$\surd$	$\surd$
ICS	SRI	Ocaml	$\oslash$	$\oslash$	$\surd$
CVC-Lite	U. New York	C++	$\surd$	$\surd$	$\surd$
haRVey	LORIA	C	$\surd$	$\surd$	$\surd$
haRVey-sat	LORIA	C	$\surd$	$\surd$	$\surd$
Zenon	INRIA	Ocaml	$\surd$	$\surd$	$\oslash$
MathSAT	U. Trento	?	$\oslash$	$\oslash$	$\surd$
Ario	U. Michigan	C++	$\oslash$	$\oslash$	$\surd$
HTP	Fordocsys	C	$\oslash$	$\oslash$	$\surd$
Zap	Microsoft	?	$\surd$	$\surd$	$\surd$
Barcelogic Tools	U. Catalonia	C++	$\oslash$	$\oslash$	$\surd$
Sammy	U. Iowa	Ocaml/C	$\surd$	$\surd$	$\surd$

Motivations : la compétition SMT-comp

SMT-LIB (*satisfiabilty modulo theories library*) : un standard pour la syntaxe et la sémantique des fichiers de *benchmark* des démonstrateurs automatiques en théorie du 1er ordre combinant des procédures de décision.

SMT-COMP : la compétition associée est organisée une fois par an et permet aux différents démonstrateurs de se mesurer.

Motivations : résultats 2006 de SMT-comp

Logique	1er	2ème	3ème
QF_UF	Yices	Barcelo	HTP
QF_RDL	Yices	Barcelo	MathSat
QF_IDL	Yices	Barcelo	MathSat
QF_UFIDL	Yices	Barcelo	MathSat
QF_LRA	Yices	HTP	MathSat
QF_LIA	Yices	MathSat	Ario
QF_UFLIA	Yices	MathSat	Ario
QF_AUFLIA	Yices	Barcelo	CVC
AUFLIRA	CVC	Yices	
AUFLIA	Yices	CVC	

Motivations : particularités des obligations de preuve

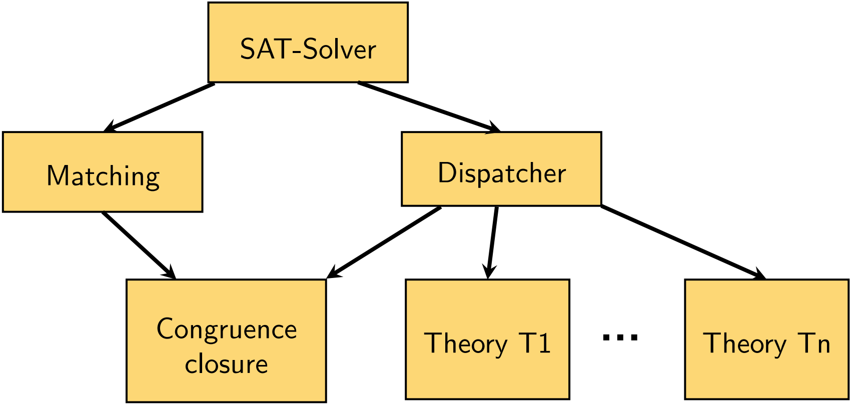
particularités des **obligations de preuve** de la vérification de programmes :

- contexte volumineux
- hypothèses inutiles
- buts simples
- égalités et arithmétique linéraire abondantes

$+$ temps de réponse du prouveur très limité (quelques secondes)

Les briques de base

Architecture générale d'un démonstrateur



Logique propositionnelle

Le problème **SAT**

Le problème **SAT** consiste à déterminer la satisfiabilité d'une formule appartenant à la logique propositionnelle.

Les algorithmes implantés ont généralement l'interface suivante :

Entrée : Un ensemble (vu comme une conjonction) de clauses

Sortie : Une affectation de variables, si l'entrée est satisfiable

SAT est un des grands problèmes NP-complet et c'est aussi probablement le problème de combinatoire/optimisation le plus étudié dans le monde. Il est au cœur de nombreux domaines d'applications :

1. la vérification de circuits ;
2. la vérification de programmes ;
3. la comparaison de génomes, etc.

Les SAT-solvers : introduction

Grâce aux améliorations spectaculaires réalisées ces dernières années dans leurs performances, les *SAT-solvers* sont devenus d'incontournables outils de vérification. Ils sont maintenant implantés dans tous les outils de démonstration automatique basés sur la combinaison de procédures de décision.

Tous les *SAT-solvers* sont basés sur des variantes de la procédure DPLL. Les outils **modernes** sont basés sur les deux optimisations suivantes :

1. Le *backtracking* **non-chronologique** (*backjumping*)
2. L'**apprentissage** par analyse des **clauses conflits**

Les SAT-solvers : plan du cours

Nous allons étudier dans ce cours le fonctionnement interne d'un SAT-solver moderne. Pour cela, nous décrirons

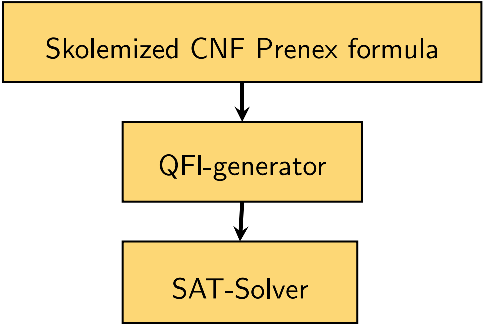
1. la procédure **DPLL** à l'aide d'un système de règles d'inférence ;
2. un mécanisme d'étiquetage des termes pour garder trace, à l'exécution, des informations de dépendance entre les clauses ;
3. le mécanisme de *backtracking* non-chronologique ;
4. l'apprentissage par analyse des clauses générées lors des conflits.

La procédure de Davis-Putnam-Logemann-Loveland

Démonstrateur automatique pour formules du 1er ordre

Davis and Putnam

A Computing Procedure for Quantification Theory [JACM 1960]



Davis, Logemann and Loveland

A Machine Program for Theorem-Proving, [CACM 1962]

Invention du mécanisme de *backtracking*

Une procédure DPLL **abstraite**

L'état de la procédure est représenté par des **séquents** $\Gamma \vdash \Delta$ et son évolution est décrite par des **règles d'inférence**.

1. Γ est un ensemble de **littéraux**
2. Δ est un ensemble de **clauses** (Δ^{unit} sont les clauses unitaires de Δ)

On note $\mathtt{vars}(X)$ l'ensemble des **variables** propositionnelles contenues dans l'ensemble de littéraux (ou clauses) X.

Definition

1. Un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est **bien formé** si et seulement si Γ ne contient pas en même temps un littéral l et son complément $\neg l$.
2. Un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est **incompatible** quand $\Gamma \longrightarrow \neg\Delta$ est valide.

Le calcul DPLL

Axiom $\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \emptyset}$

Unit $\dfrac{l, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, l}$

Elim $\dfrac{l, \Gamma \vdash \Delta}{l, \Gamma \vdash \Delta, l \vee C}$

Red $\dfrac{l, \Gamma \vdash \Delta, C}{l, \Gamma \vdash \Delta, \bar{l} \vee C}$

$\left.\begin{array}{l}\text{Unit}\\ \text{Elim}\\ \text{Red}\end{array}\right\}$ Propagation des contraintes Booléennes

Split $\dfrac{l, \Gamma \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash \Delta, , \bar{l}}{\Gamma \vdash \Delta}$

Le calcul DPLL

Axiom $\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \emptyset}$ Γ est bien formé

Unit $\dfrac{l, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, l}$ $l, \bar{l} \notin \Gamma$

Elim $\dfrac{l, \Gamma \vdash \Delta}{l, \Gamma \vdash \Delta, l \vee C}$

Red $\dfrac{l, \Gamma \vdash \Delta, C}{l, \Gamma \vdash \Delta, \bar{l} \vee C}$

$\left.\right\}$ Propagation des contraintes Booléennes

Split $\dfrac{l, \Gamma \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash \Delta, , \bar{l}}{\Gamma \vdash \Delta}$ $l, \bar{l} \notin \Gamma \cup \Delta$ et $l \vee C \in \Delta$

Correction de l'algorithme

Theorem (Correction)

Un séquent bien formé $\Gamma \vdash \Delta$ *est* **incompatible** *si et seulement si il est la racine d'un arbre de dérivation fini dans le calcul DPLL.*

La preuve *papier* de ce théorème ne pose pas de problèmes particuliers. La preuve *formelle* en **Coq** est elle un peu plus longue (environ 1800 lignes de définitions et tactiques !).

Démonstration.

Une simple analyse par cas des règles suffit à prouver la sûreté de l'algorithme. La complétude se prouve par une induction sur la taille d'un séquent Δ définie comme la paire $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$ où $\mathcal{F}$ est le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathtt{vars}(\Delta) \setminus (\mathtt{vars}(\Gamma) \cup \mathtt{vars}(\Delta^{\mathsf{unit}}))$ et $\mathcal{S}$ est la somme du nombre de littéraux dans chaque clause de Δ. $\square$

Procédure de décision

Le résultat suivant permet de déterminer la satisfiabilité d'une formule propositionnelle :

Un ensemble de clauses Δ est insatisfiable si et seulement si $\emptyset \vdash \Delta$ est dérivable dans DPLL.

Les *side conditions* du système d'inférence laissent un large choix dans l'ordre d'application des règles. Une procédure de décision est obtenue en choisissant une **stratégie** dont il faut alors prouver la complétude.

Dans le cas d'une preuve en **Coq**, la stratégie est en fait *inscrite* dans la preuve constructive.

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{x_0, \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & \omega_7 = \{\bar{x}_0, \bar{x}_7\} & \omega_8 = \{\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_3\} \end{cases}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{x_0, \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & \omega_7 = \{\bar{x}_0, \bar{x}_7\} & \omega_8 = \{\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_3\} \end{cases}$$

$$\frac{}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \omega_8 = \{\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_3\} \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\boldsymbol{\Delta} \begin{cases} \omega_0 = \{\ \ \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \omega_8 = \{\ \ \bar{x}_1, \bar{x}_3\} \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{\quad \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\boldsymbol{\Delta} \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{ \quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{ \quad \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ & & \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{ \quad x_5\} \quad \omega_1 = \{ \quad x_4\} \quad \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{ \quad x_5 \} & \omega_2 = \{ \quad \bar{x}_5 \} \\ & \omega_5 = \{ \bar{x}_6, \bar{x}_7 \} \\ & \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = \{ \quad \} \\ \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \end{array} \right.$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = \{ \quad \} \\ \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \end{array} \right.$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{ \quad\quad x_5 \} \qquad\qquad \omega_2 = \{ \quad \bar{x}_5 \} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \omega_5 = \{ \bar{x}_6, \bar{x}_7 \} \\ \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

$$\Delta \left\{ \begin{array}{llll} \omega_0 = \{ \quad x_5 \} & \omega_1 = \{ \quad x_4 \} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ & & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ & & \end{array} \right.$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{ \quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{ \quad \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ & & \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{\ \ \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{\ \ \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ & & \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \quad \dfrac{}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\bar{x}_0 \vdash$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} & & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{ \quad x_6\} & \omega_4 = \{ \quad x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ & & \end{array} \right.$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \cfrac{\cfrac{}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{ll} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_4 = \{ \quad x_7\} & \omega_5 = \{ \quad \bar{x}_7\} \\ & \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\dfrac{\dfrac{}{\bar{x}_1 \vdash}}{\dfrac{}{x \vdash}}}$$

$$\bar{x}_0 \vdash$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_5 = \{ \quad \} \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_5 = \{\quad\} \end{array} \right.$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{ll} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_4 = \{ \quad x_7\} & \omega_5 = \{ \quad \bar{x}_7\} \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} & & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{ \quad x_6\} & \omega_4 = \{ \quad x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ & & \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{ \quad \bar{x}_3, x_5 \} & \omega_1 = \{ \quad \bar{x}_3, x_4 \} & \omega_2 = \{ \bar{x}_4, \bar{x}_5 \} \\ \omega_3 = \{ x_3, x_6 \} & \omega_4 = \{ x_3, x_7 \} & \omega_5 = \{ \bar{x}_6, \bar{x}_7 \} \\ & & \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{\quad \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{\quad \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \color{red}{\omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\}} & & \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \qquad \dfrac{}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{\quad \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{\quad x_5, x_7\} & & \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{ x_5 \} \quad \omega_1 = \{ x_4 \} \quad \omega_2 = \{ \bar{x}_4, \bar{x}_5 \} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \omega_5 = \{ \bar{x}_6, \bar{x}_7 \} \\ \omega_6 = \{ x_5, x_7 \} \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{ \quad x_5 \} & \omega_2 = \{ \quad \bar{x}_5 \} \\ & \omega_5 = \{ \bar{x}_6, \bar{x}_7 \} \\ \omega_6 = \{ \quad x_5, x_7 \} & \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} & \color{red}{\omega_2 = \{ \quad \}} \\ & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{ \quad x_5, x_7\} & \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{ll} & \omega_2 = \{ \quad \} \\ & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{ \quad x_5, x_7\} & \end{array} \right.$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\cfrac{\bar{x}_1 \vdash}{\cfrac{x \vdash}{\bar{x}_0 \vdash}}}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{ \quad x_5 \} & \omega_2 = \{ \quad \bar{x}_5 \} \\ & \omega_5 = \{ \bar{x}_6, \bar{x}_7 \} \\ \omega_6 = \{ \quad x_5, x_7 \} & \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{ x_5 \} \quad \omega_1 = \{ x_4 \} \quad \omega_2 = \{ \bar{x}_4, \bar{x}_5 \} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \omega_5 = \{ \bar{x}_6, \bar{x}_7 \} \\ \omega_6 = \{ x_5, x_7 \} \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$
\Delta \left\{
\begin{array}{lll}
\omega_0 = \{\ \ \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{\ \ \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\
\omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\
\omega_6 = \{\ \ x_5, x_7\} & &
\end{array}
\right.
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}
$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{\quad \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \omega_8 = \{\quad \bar{x}_1, \bar{x}_3\} \end{array} \right.$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{\ \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \omega_8 = \{\ \bar{x}_1, \bar{x}_3\} \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash} \quad \dfrac{}{x_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\} & & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \omega_8 = \{\qquad \bar{x}_3\} \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} & & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{ \quad x_6\} & \omega_4 = \{ \quad x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} & & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ & \omega_4 = \{\quad x_7\} & \omega_5 = \{\quad \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1 \vdash}}{\dfrac{x \vdash}{\bar{x}_0 \vdash}}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ & \omega_5 = \{\quad\} \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, x, x_1]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_5 = \{ \qquad \} \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, x, x_1]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} & & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ & \omega_4 = \{\quad x_7\} & \omega_5 = \{\quad \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, x, x_1]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Exemple

$$
\Delta \left\{
\begin{array}{lll}
 & & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\
\omega_3 = \{\quad x_6\} & \omega_4 = \{\quad x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\
\omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & &
\end{array}
\right.
$$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}
      \qquad
      \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}
    }{x_2 \vdash}
    \qquad
    \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}
  }{\bar{x}_1 \vdash}
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, x, x_1]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1 \vdash}
}{
  \dfrac{x \vdash}{\bar{x}_0 \vdash}
}
$$

Exemple

$$
\Delta \left\{
\begin{array}{lll}
\omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\} & & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\
\omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\
\omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \omega_8 = \{\quad \bar{x}_3\}
\end{array}
\right.
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}
}{x_2 \vdash}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}
}{\bar{x}_1 \vdash}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, x, x_1]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1 \vdash}
}{x \vdash}
}{\bar{x}_0 \vdash}
$$

Exemple

$$
\Delta \left\{
\begin{array}{lll}
\omega_0 = \{\ \ \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\
\omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\
\omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \omega_8 = \{\ \ \bar{x}_1, \bar{x}_3\}
\end{array}
\right.
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}
}{x_2 \vdash}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}
}{\bar{x}_1 \vdash}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, x, x_1]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1 \vdash}
}{x \vdash}
}{\bar{x}_0 \vdash}
$$

Exemple

$$
\Delta \left\{
\begin{array}{lll}
\omega_0 = \{\ \ \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\
\omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\
\omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \omega_8 = \{\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_3\}
\end{array}
\right.
$$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}
      \qquad
      \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}
    }{x_2 \vdash}
    \qquad
    \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}
  }{\bar{x}_1 \vdash}
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, x, x_1]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1 \vdash}
}{
  \dfrac{x \vdash}{\bar{x}_0 \vdash}
}
$$

Exemple

$$
\Delta \left\{
\begin{array}{llllll}
\omega_0 & = \{\quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 & = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 & = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\
\omega_3 & = \{x_3, x_6\} & \omega_4 & = \{x_3, x_7\} & \omega_5 & = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\
\omega_6 & = \{x_2, x_5, x_7\} & & & \omega_8 & = \{\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_3\}
\end{array}
\right.
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}
}{x_2 \vdash}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{\bar{x}_2 \vdash}
}{\bar{x}_1 \vdash}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, x, x_1]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1 \vdash}
}{x \vdash}
\qquad
\dfrac{\vdots}{\bar{x} \vdash}
}{\bar{x}_0 \vdash}
$$

SAT-solvers efficaces

Comment optimiser DPLL ?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Comment optimiser DPLL ?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Comment optimiser DPLL ?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\color{red}{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Comment optimiser DPLL ?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{\color{red}[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{{\color{red}[\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_3]}}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

Comment optimiser DPLL ?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1 \quad]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

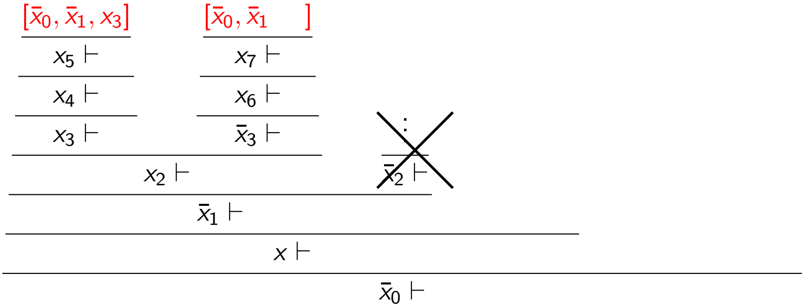
Comment optimiser DPLL ?

$$
\frac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\dfrac{\dfrac{\color{red}{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}
      \qquad
      \dfrac{\dfrac{\dfrac{\color{red}{[\bar{x}_0, \bar{x}_1 \quad]}}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}
    }{x_2 \vdash}
    \qquad
    \dfrac{\vdots}{\bar{x}_2 \vdash}
  }{\bar{x}_1 \vdash}
}{
  \dfrac{}{x \vdash}
}
$$

$$\overline{\bar{x}_0 \vdash}$$

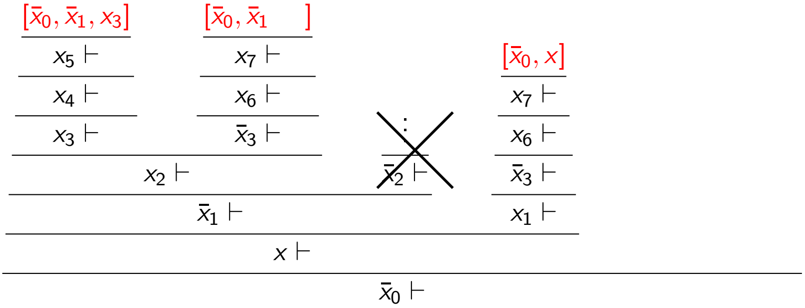
Comment optimiser DPLL ?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_5 \vdash}}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bar{x}_0, \bar{x}_1 \quad]}{x_7 \vdash}}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_2 \vdash} \quad \cancel{\dfrac{\vdots}{\bar{x}_2 \vdash}}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0 \vdash}$$

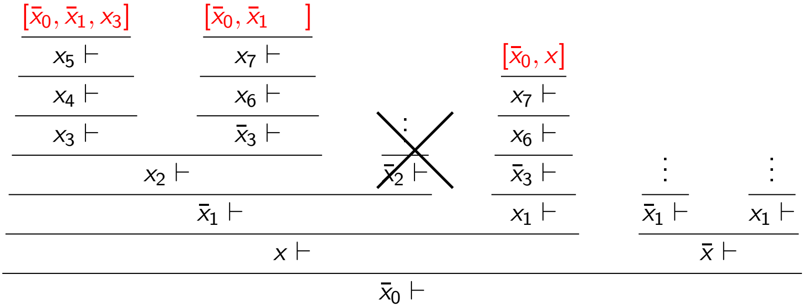


1. C'est le backtraking **non-chronologique**

Comment optimiser DPLL ?

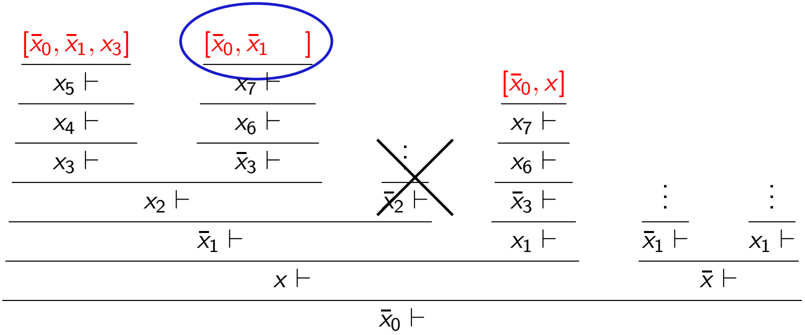


1. C'est le backtraking **non-chronologique**

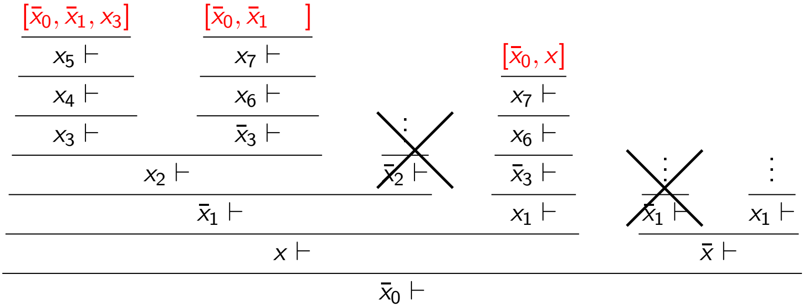


1. C'est le backtraking **non-chronologique**

Comment optimiser DPLL ?

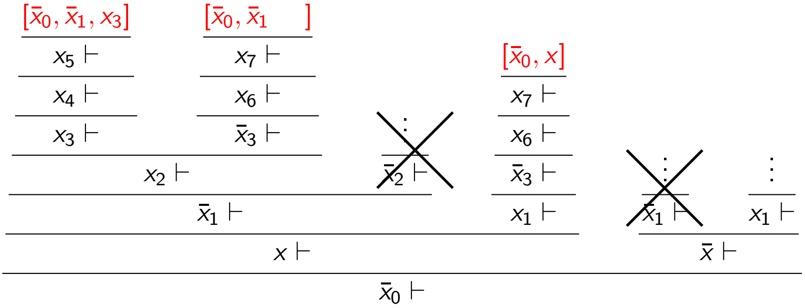


1. C'est le backtraking **non-chronologique**



1. C'est le backtraking **non-chronologique**

Comment optimiser DPLL ?



1. C'est le backtraking **non-chronologique**
2. C'est l'**apprentissage**

Graphe d'implication

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{x_0, \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & \omega_7 = \{\bar{x}_0, \bar{x}_7\} & \omega_8 = \{\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_3\} \end{array} \right.$$

Graphe d'implication

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{x_0, \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & \omega_7 = \{\bar{x}_0, \bar{x}_7\} & \omega_8 = \{\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_3\} \end{cases}$$

$\bar{x}_0$

Graphe d'implication

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{ \quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \omega_8 = \{\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_3\} \end{cases}$$

$\bar{x}_0$

Graphe d'implication

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{ \quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & & \omega_8 = \{ \quad \bar{x}_1, \bar{x}_3\} \end{cases}$$

$\bar{x}_0$

$\bar{x}_1$

Graphe d'implication

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{\quad \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} \end{cases}$$

$\bar{x}_0$

$\bar{x}_1$

$$\mathbf{\Delta}\left\{\begin{array}{lll} \omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{\quad \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ & & \end{array}\right.$$

$\bar{x}_0$

x_3

$\bar{x}_1$

Graphe d'implication

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{ \quad x_5\} & \omega_1 = \{ \quad x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ & & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ & & \end{array} \right.$$

$$\begin{tikzcd}
\bar{x}_0 & \\
 & \\
x_3 \arrow[dr] & \\
 & x_4 \\
\bar{x}_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Graphe d'implication

$$\Delta \left\{ \begin{array}{ll} \omega_0 = \{ \quad x_5 \} & \omega_2 = \{ \quad \bar{x}_5 \} \\ & \omega_5 = \{ \bar{x}_6, \bar{x}_7 \} \\ & \end{array} \right.$$

$$\begin{tikzcd}
\bar{x}_0 \arrow[dr] & \\
& x_5 \\
x_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& x_4 \\
\bar{x}_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Graphe d'implication

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = \{ \qquad \} \\ \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \end{array} \right.$$

$$\begin{tikzcd}
\bar{x}_0 \arrow[dr] & & \\
 & x_5 \arrow[dr] & \\
x_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \emptyset \\
 & x_4 \arrow[ur] & \\
\bar{x}_1 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Graphe d'implication

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{x_0, \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & \omega_7 = \{\bar{x}_0, \bar{x}_7\} & \omega_8 = \{\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_3\} \end{array} \right.$$

$$\begin{tikzcd}
\bar{x}_0 \arrow[dr] & & \\
& x_5 \arrow[dr] & \\
x_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \emptyset \\
& x_4 \arrow[ur] & \\
\bar{x}_1 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Un nouveau graphe d'implication

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{ \quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{ \quad \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ & & \end{array} \right.$$

$\bar{x}_0$

$\bar{x}_1$

$$\boldsymbol{\Delta} \begin{cases} \omega_0 = \{ \quad \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{ \quad \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ & & \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \bar{x}_0 \arrow[dr] & \\ & \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Un nouveau graphe d'implication

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} & & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{ \quad x_6\} & \omega_4 = \{ \quad x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ & & \end{array} \right.$$

$$\begin{tikzcd}
\bar{x}_0 \arrow[dr] & & x_6 \\
& \bar{x}_3 \arrow[ur] & \\
\bar{x}_1 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Un nouveau graphe d'implication

$$\Delta \left\{ \begin{array}{ll} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_4 = \{ \quad x_7\} & \omega_5 = \{ \quad \bar{x}_7\} \\ & \end{array} \right.$$

$$\begin{tikzcd}
\bar{x}_0 \arrow[dr] & & x_6 \\
& \bar{x}_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\bar{x}_1 \arrow[ur] & & \bar{x}_7
\end{tikzcd}$$

Un nouveau graphe d'implication

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ {\color{red}\omega_5 = \{ \quad \}} \end{array} \right.$$

$$\begin{tikzcd}
\bar{x}_0 \arrow[dr] & & x_6 \arrow[dr] & \\
& \bar{x}_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & {\color{red}\emptyset} \\
\bar{x}_1 \arrow[ur] & & \bar{x}_7 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Un nouveau graphe d'implication

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{x_0, \bar{x}_3, x_5\} & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\} \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\} & \omega_4 = \{x_3, x_7\} & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\} & \omega_7 = \{\bar{x}_0, \bar{x}_7\} & \omega_8 = \{\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_3\} \end{array} \right.$$

$$\begin{tikzcd}
\bar{x}_0 \arrow[dr] & & x_6 \arrow[dr] & \\
& \bar{x}_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \emptyset \\
\bar{x}_1 \arrow[ur] & & \bar{x}_7 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Analyse de dépendance pour le calcul DPLL

Les littéraux et les clauses sont maintenant étiquetés par des informations de **dépendance**.

Étant donné un ensemble de littéraux $\mathcal{A}$, on note $l[\mathcal{A}]$ le littéral l **annoté** par $\mathcal{A}$ (resp. $C[\mathcal{A}]$ est la clause C annotée par $\mathcal{A}$).

L'état de la procédure est représenté par des séquents $\Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A}$

1. $\mathcal{A}$ est un ensemble de littéraux ;
2. Γ est un ensemble de **littéraux annotés** ;
3. Δ est un ensemble de **clauses annotées**.

On note $\Gamma^{\#}$ (resp. $\Delta^{\#}$) l'ensemble obtenu en supprimant les annotations contenues dans Γ (resp. Δ).

DPLL avec *dépendances* (DPLL-B) : propagation des contraintes Booléennes

BAxiom $$\frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \emptyset[\mathcal{A}] : \mathcal{A}}$$

BUnit $$\frac{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A}}{\Gamma \vdash \Delta, l[\mathcal{B}] : \mathcal{A}}$$

BElim $$\frac{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A}}{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta, l \vee C[\mathcal{C}] : \mathcal{A}}$$

BRed $$\frac{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta, C[\mathcal{C} \cup \mathcal{B}] : \mathcal{A}}{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta, \bar{l} \vee C[\mathcal{C}] : \mathcal{A}}$$

DPLL avec *dépendances* (DPLL-B) : propagation des contraintes Booléennes

BAxiom $$\frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \emptyset[\mathcal{A}] : \mathcal{A}}$$ Γ est bien formé

BUnit $$\frac{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A}}{\Gamma \vdash \Delta, l[\mathcal{B}] : \mathcal{A}}$$ $l, \bar{l} \notin \Gamma^{\#}$

BElim $$\frac{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A}}{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta, l \vee C[\mathcal{C}] : \mathcal{A}}$$

BRed $$\frac{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta, C[\mathcal{C} \cup \mathcal{B}] : \mathcal{A}}{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta, \bar{l} \vee C[\mathcal{C}] : \mathcal{A}}$$

DPLL avec *dépendances* (DPLL-B) : backtracking *non-chronologique*

$$\textbf{BSplit} \quad \frac{l[l], \Gamma \vdash \Delta : \mathcal{B} \quad \Gamma \vdash \Delta, \bar{l}[\mathcal{B} \setminus l] : \mathcal{A} \quad l \in \mathcal{B}}{\Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A}}$$

$$\textbf{BJ} \quad \frac{l[l], \Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A} \qquad l \notin \mathcal{A}}{\Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A}}$$

DPLL avec *dépendances* (DPLL-B) : backtracking *non-chronologique*

BSplit $\dfrac{l[l], \Gamma \vdash \Delta : \mathcal{B} \quad \Gamma \vdash \Delta, \bar{l}[\mathcal{B} \setminus l] : \mathcal{A} \quad l \in \mathcal{B}}{\Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A}}$

$l, \bar{l} \notin (\Gamma \cup \Delta)^{\#}$
$l \vee C \in \Delta^{\#}$

BJ $\dfrac{l[l], \Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A} \qquad l \notin \mathcal{A}}{\Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A}}$

$l, \bar{l} \notin (\Gamma \cup \Delta)^{\#}$ and $l \vee C \in \Delta^{\#}$

Correction : stabilité

Notations :

1. Γ est l'ensemble obtenu en annotant les littéraux de Γ avec $[\emptyset]$;
2. $\lfloor\Gamma\rfloor_{\mathcal{A}}$ est l'ensemble obtenu en supprimant les éléments $l[\mathcal{B}]$ de Γ quand $\mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{A}$.

On suppose que les séquents sont **bien annotés**, c'est à dire que pour toute annotation l contenue dans $\Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A}$, il existe un littéral $l[l] \in \Gamma$.

On montre que les règles d'inférence propagent correctement les informations de dépendance par la propriété de stabilité suivante :

Lemma (Stabilité)

Si $\Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A}$ est dérivable alors $\lfloor\Gamma\rfloor_{\mathcal{A}} \vdash \lfloor\Delta\rfloor_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}$ l'est aussi.

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{x_0, \bar{x}_3, x_5\}[\quad\quad] & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\}[\quad\quad] & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\quad\quad] \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\}[\quad\quad] & \omega_4 = \{x_3, x_7\}[\quad\quad] & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad\quad] \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\}[] & \omega_7 = \{\bar{x}_0, \bar{x}_7\}[] & \omega_8 = \{\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_3\}[\quad\quad] \end{array} \right.$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{x_0, \bar{x}_3, x_5\}[\quad] & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\}[\quad] & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\quad] \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\}[\quad] & \omega_4 = \{x_3, x_7\}[\quad] & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad] \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\}[] & \omega_7 = \{\bar{x}_0, \bar{x}_7\}[] & \omega_8 = \{\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_3\}[\quad] \end{cases}$$

$$\frac{}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\}[\bar{x}_0, \quad] & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\}[\quad] & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\quad] \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\}[\quad] & \omega_4 = \{x_3, x_7\}[\quad] & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad] \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\}[] & & \omega_8 = \{\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_3\}[\quad] \end{cases}$$

$$\dfrac{\overline{}}{\dfrac{x[x] \vdash}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{ \quad \bar{x}_3, x_5\}[\bar{x}_0, \quad] & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\}[\quad] & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\quad] \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\}[\quad] & \omega_4 = \{x_3, x_7\}[\quad] & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad] \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\}[] & & \omega_8 = \{ \quad \bar{x}_1, \bar{x}_3\}[x \quad] \end{array} \right.$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\}[\bar{x}_0, \quad] & \omega_1 = \{\quad \bar{x}_3, x_4\}[\bar{x}_1, \quad] & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\quad] \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\}[\quad] & \omega_4 = \{x_3, x_7\}[\quad] & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad] \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\}[] \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{\ \bar{x}_3, x_5\}[\bar{x}_0,\ ] & \omega_1 = \{\ \bar{x}_3, x_4\}[\bar{x}_1,\ ] & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\ ] \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\}[\ ] & \omega_4 = \{x_3, x_7\}[\ ] & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\ ] \end{array} \right.$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{x_3[x_3] \vdash}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{ \quad x_5\}[\bar{x}_0, x_3] \quad \omega_1 = \{ \quad x_4\}[\bar{x}_1, x_3] \quad \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\quad] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad] \end{cases}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash}}{x_3[x_3] \vdash}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{ll} \omega_0 = \{ \quad x_5\}[\bar{x}_0, x_3] & \omega_2 = \{ \quad \bar{x}_5\}[\bar{x}_1, \quad x_3] \\ & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad] \end{array} \right.$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash}}{x_3[x_3] \vdash}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\mathbf{\Delta}\left\{\begin{array}{l}\omega_2 = \{\quad\}[\bar{x}_1, \bar{x}_0, x_3] \\ \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad]\end{array}\right.$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash}}{x_3[x_3] \vdash}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = \{ \quad \}[\bar{x}_1, \bar{x}_0, x_3] \\ \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad] \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash}}{x_3[x_3] \vdash}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{ll} \omega_0 = \{ \quad x_5\}[\bar{x}_0, x_3] & \omega_2 = \{ \quad \bar{x}_5\}[\bar{x}_1, \quad x_3] \\ & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad] \\ & \end{array} \right.$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash}}{x_3[x_3] \vdash}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} \omega_0 = \{ \quad x_5\}[\bar{x}_0, x_3] \quad \omega_1 = \{ \quad x_4\}[\bar{x}_1, x_3] \quad \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\quad] \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad] \end{cases}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_3[x_3] \vdash}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{ \quad \bar{x}_3, x_5\}[\bar{x}_0, \quad] & \omega_1 = \{ \quad \bar{x}_3, x_4\}[\bar{x}_1, \quad] & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\quad] \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\}[\quad] & \omega_4 = \{x_3, x_7\}[\quad] & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad] \end{array} \right.$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_3[x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta\left\{\begin{array}{llllll} \omega_0 = \{ & \bar{x}_3, x_5\}[\bar{x}_0, \quad] & \omega_1 = \{ & \bar{x}_3, x_4\}[\bar{x}_1, \quad] & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\quad] \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\}[\quad] & & \omega_4 = \{x_3, x_7\}[\quad] & & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad] \end{array}\right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_3[x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]} \quad \dfrac{}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\mathbf{\Delta}\left\{\begin{array}{lll} & & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\quad\quad\quad] \\ \omega_3 = \{\quad x_6\}[\bar{x}_0, \bar{x}_1] & \omega_4 = \{\quad x_7\}[\bar{x}_0, \bar{x}_1] & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad\quad] \end{array}\right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_3[x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]} \quad \dfrac{\dfrac{}{x_6[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \begin{cases} & & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\qquad\qquad] \\ & \omega_4 = \{\quad x_7\}[\bar{x}_0, \bar{x}_1] & \omega_5 = \{\quad \bar{x}_7\}[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \\ & & \end{cases}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_3[x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]} \qquad \dfrac{\dfrac{x_7[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}{x_6[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\qquad\quad] \\ \omega_5 = \{\qquad\quad\}[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_3[x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]} \qquad \dfrac{\dfrac{x_7[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}{x_6[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{x_2[x_2] \vdash}}{\dfrac{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}{\dfrac{x[x] \vdash}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}}}$$

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\qquad\quad] \\ \omega_5 = \{\qquad\quad\}[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_3[x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]} \qquad \dfrac{\dfrac{x_7[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}{x_6[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{ll} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\qquad\qquad] \\ \omega_4 = \{\quad x_7\}[\bar{x}_0, \bar{x}_1] & \omega_5 = \{\quad \bar{x}_7\}[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \\ & \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_3[x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]} \quad \dfrac{\dfrac{x_7[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}{x_6[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{\dfrac{x[x] \vdash}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}}$$

$$\Delta \left\{ \quad \omega_3 = \{ \quad\quad x_6\}[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \qquad \omega_4 = \{ \quad\quad x_7\}[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \qquad \begin{array}{l} \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\qquad\qquad] \\ \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\qquad\quad] \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_3[x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]} \qquad \dfrac{\dfrac{x_7[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}{x_6[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{llllll} \omega_0 = \{ & \bar{x}_3, x_5\}[\bar{x}_0, \quad] & \omega_1 = \{ & \bar{x}_3, x_4\}[\bar{x}_1, \quad] & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\quad] \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\}[\quad] & & \omega_4 = \{x_3, x_7\}[\quad] & & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\quad] \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_3[x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]} \qquad \dfrac{\dfrac{x_7[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}{x_6[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}}{x_2[x_2] \vdash}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\}[\bar{x}_0, \quad] & \omega_1 = \{\quad \bar{x}_3, x_4\}[\bar{x}_1, \quad] & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\qquad] \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\}[\qquad] & \omega_4 = \{x_3, x_7\}[\qquad] & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\qquad] \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\}[] & & \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_3[x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]} \qquad \dfrac{\dfrac{x_7[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}{x_6[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}}{x_2[x_2] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} \omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\}[\bar{x}_0, \quad] & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\}[\qquad] & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\qquad\quad] \\ \omega_3 = \{x_3, x_6\}[\qquad] & \omega_4 = \{x_3, x_7\}[\qquad] & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\qquad] \\ \omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\}[] & & \omega_8 = \{\quad \bar{x}_1, \bar{x}_3\}[x \quad] \end{array} \right.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}{x_3[x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]} \qquad \dfrac{\dfrac{x_7[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}{x_6[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}}{x_2[x_2] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}\ [\mathbf{BJ}]}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}}{x[x] \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$
\Delta\left\{
\begin{array}{lll}
\omega_0 = \{\quad \bar{x}_3, x_5\}[\bar{x}_0, \quad] & \color{red}{\omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\}[\qquad]} & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\qquad\qquad] \\
\omega_3 = \{x_3, x_6\}[\qquad] & \omega_4 = \{x_3, x_7\}[\qquad] & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\qquad] \\
\omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\}[] & & \color{red}{\omega_8 = \{\quad \bar{x}_1, \bar{x}_3\}[x \quad]}
\end{array}
\right.
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{\dfrac{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_3[x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}}
\qquad
\dfrac{x_7[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}{\dfrac{x_6[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}}
}{x_2[x_2] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}
\quad \color{red}{[\mathbf{BJ}]}
}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}
\qquad
\dfrac{}{x_1[\bar{x}_0] \vdash}
}{\dfrac{x[x] \vdash}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}}
$$

Exemple

$$
\Delta \begin{cases}
\omega_0 = \{ \quad \bar{x}_3, x_5\}[\bar{x}_0, \quad] & & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\qquad] \\
\omega_3 = \{x_3, x_6\}[\qquad] & \omega_4 = \{x_3, x_7\}[\qquad] & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\qquad] \\
\omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\}[] & & \omega_8 = \{ \quad \bar{x}_1, \bar{x}_3\}[x, \bar{x}_0]
\end{cases}
$$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}
      }{x_3[x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}
      \qquad
      \dfrac{
        \dfrac{x_7[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}{x_6[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}
      }{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}
    }{x_2[x_2] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}
    \;\textbf{[BJ]}
  }{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}
  \qquad
  \dfrac{\vdots}{x_1[\bar{x}_0] \vdash}
}{
  \dfrac{x[x] \vdash}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
}
$$

Exemple...

$$\boldsymbol{\Delta}\left\{\begin{array}{lll}
\omega_0 = \{x_0,\bar{x}_3,x_5\}[\bar{x}_0,x_3] & \omega_1 = \{x_1,\bar{x}_3,x_4\}[\bar{x}_1,x_3] & \omega_2 = \{\bar{x}_4,\bar{x}_5\}[\bar{x}_1,\bar{x}_0,x_3] \\
\omega_3 = \{x_3,x_6\}[\bar{x}_0,\bar{x}_1] & \omega_4 = \{x_3,x_7\}[\bar{x}_0,\bar{x}_1] & \omega_5 = \{\bar{x}_6,\bar{x}_7\}[\bar{x}_0,\bar{x}_1] \\
\omega_6 = \{x_2,x_5,x_7\}[] & \omega_7 = \{\bar{x}_0,\bar{x}_7\}[] & \omega_8 = \{\bar{x},\bar{x}_1,\bar{x}_3\}[x,\bar{x}_0]
\end{array}\right.$$

Exemple...

$$
\Delta \left\{ \begin{array}{lll}
\omega_0 = \{x_0, \bar{x}_3, x_5\}[\bar{x}_0, x_3] & \omega_1 = \{x_1, \bar{x}_3, x_4\}[\bar{x}_1, x_3] & \omega_2 = \{\bar{x}_4, \bar{x}_5\}[\bar{x}_1, \bar{x}_0, x_3] \\
\omega_3 = \{x_3, x_6\}[\bar{x}_0, \bar{x}_1] & \omega_4 = \{x_3, x_7\}[\bar{x}_0, \bar{x}_1] & \omega_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \\
\omega_6 = \{x_2, x_5, x_7\}[] & \omega_7 = \{\bar{x}_0, \bar{x}_7\}[] & \omega_8 = \{\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_3\}[x, \bar{x}_0]
\end{array} \right.
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{x_5[\bar{x}_0, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}{x_4[\bar{x}_1, x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}
}{x_3[x_3] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{x_7[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}{x_6[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}
}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}
}{x_2[x_2] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}
}{\bar{x}_1[\bar{x}_1] \vdash [\bar{x}_0, \bar{x}_1]}\ [\mathbf{BJ}]
\qquad
\dfrac{\vdots}{x_1[\bar{x}_0] \vdash}
}{x[x] \vdash}
}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

Correction de DPLL-B

Theorem (Sûreté)

Si $\Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A}$ *est dérivable dans DPLL-B alors* $\Gamma^{\#} \vdash \Delta^{\#}$ *est incompatible.*

La complétude peut s'obtenir en utilisant le système DPLL (puisque ce système est complet).

Theorem (Complétude)

Si $\Gamma \vdash \Delta$ *est un séquent bien formé et dérivable dans DPLL alors il existe un ensemble* $\mathcal{A}$ *tel que* $\Gamma \vdash \Delta : \mathcal{A}$ *soit dérivable dans DPLL-B.*

La preuve de correction en **Coq** ajoute environ 2000 lignes de tactiques à celle de DPLL.

L'état de la procédure est maintenant représentée par des séquents de la forme $\Gamma \vdash \Delta : \mathbb{A}$ où $\mathbb{A}$ est un ensemble de **clauses annotées** (les ensembles Γ et Δ sont inchangés).

Étant donné un littéral l, on définit la fonction $\texttt{Shift}_l$ par :

$$
\begin{array}{ll}
(\texttt{Shift}_l\ \emptyset) = \emptyset & \\
(\texttt{Shift}_l\ \{C[\mathcal{A}, l]\} \cup \mathbb{A}\,) = \{\bar{l} \vee C[\mathcal{A}]\} \cup (\texttt{Shift}_l \mathbb{A}\,) & \\
(\texttt{Shift}_l\ \{C[\mathcal{A}]\} \cup \mathbb{A}\,) = \{C[\mathcal{A}]\} \cup (\texttt{Shift}_l \mathbb{A}\,) & \text{si } l \notin \mathcal{A}
\end{array}
$$

DPLL avec apprentissage (DPLL-C) : propagation des contraintes booléennes

CAxiom $\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \emptyset[\mathcal{A}] : \{\ \emptyset[\mathcal{A}]\ \}}$

CUnit $\dfrac{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta : \mathbb{A}}{\Gamma \vdash \Delta, l[\mathcal{B}] : \mathbb{A}}$

CElim $\dfrac{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta : \mathbb{A}}{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta, l \vee C[\mathcal{C}] : \mathbb{A}}$

CRed $\dfrac{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta, C[\mathcal{C} \cup \mathcal{B}] : \mathbb{A}}{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta, \bar{l} \vee C[\mathcal{C}] : \mathbb{A}}$

DPLL avec apprentissage (DPLL-C) : propagation des contraintes booléennes

CAxiom $\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \emptyset[\mathcal{A}] : \{\ \emptyset[\mathcal{A}]\ \}}$ Γ est bien formé

CUnit $\dfrac{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta : \mathbb{A}}{\Gamma \vdash \Delta, l[\mathcal{B}] : \mathbb{A}}$ $l, \bar{l} \notin \Gamma^{\#}$

CElim $\dfrac{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta : \mathbb{A}}{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta, l \vee C[\mathcal{C}] : \mathbb{A}}$

CRed $\dfrac{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta, C[\mathcal{C} \cup \mathcal{B}] : \mathbb{A}}{l[\mathcal{B}], \Gamma \vdash \Delta, \bar{l} \vee C[\mathcal{C}] : \mathbb{A}}$

DPLL-C : apprentissage

CSplit $$\frac{l[l], \Gamma \vdash \Delta : \mathbb{B} \quad \Gamma \vdash \Delta, (\mathtt{Shift}_l \mathbb{B}) : \mathbb{A} \quad \emptyset[\mathcal{B}, l] \in \mathbb{B}}{\Gamma \vdash \Delta : (\mathtt{Shift}_l \mathbb{B}) \cup \mathbb{A}}$$

CBJ $$\frac{l[l], \Gamma \vdash \Delta : \mathbb{A} \qquad \nexists \mathcal{A}.\ \emptyset[\mathcal{A}, l] \in \mathbb{A}}{\Gamma \vdash \Delta : (\mathtt{Shift}_l \mathbb{A})}$$

DPLL-C : apprentissage

CSplit $\dfrac{l[l], \Gamma \vdash \Delta : \mathbb{B} \quad \Gamma \vdash \Delta, (\texttt{Shift}_l \mathbb{B}) : \mathbb{A} \quad \emptyset[\mathcal{B}, l] \in \mathbb{B}}{\Gamma \vdash \Delta : (\texttt{Shift}_l \mathbb{B}) \cup \mathbb{A}}$

$$l, \bar{l} \notin (\Gamma \cup \Delta)^{\#} \text{ et } l \vee C \in \Delta^{\#}$$

CBJ $\dfrac{l[l], \Gamma \vdash \Delta : \mathbb{A} \qquad \nexists.\ \emptyset[\mathcal{A}, l] \in \mathbb{A}}{\Gamma \vdash \Delta : (\texttt{Shift}_l \mathbb{A})}$

$$l, \bar{l} \notin (\Gamma \cup \Delta)^{\#} \text{ et } l \vee C \in \Delta^{\#}$$

Exemple

Exemple

$$\frac{}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\dfrac{\overline{\quad x \vdash \quad}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\quad\bar{x}_1 \vdash \quad}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\qquad x_2 \vdash \qquad}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{\dfrac{x \vdash}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}}$$

Exemple

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash \; : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

$$\mathbb{A}_1 \quad = \quad \{ \; \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3] \; \}$$

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash \ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash}}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

$$\mathbb{A}_1 \quad = \quad \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \}$$

Exemple

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

$$\mathbb{A}_1 \quad = \quad \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \}$$

Exemple

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x_5 \vdash \;:\mathbb{A}_1}{x_4 \vdash \;:\mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash \;:\mathbb{A}_1}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\mathbb{A}_1 \quad = \quad \{ \; \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3] \; \}
$$

Exemple

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash \ :\mathbb{A}_1}{x_4 \vdash \ :\mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash \ :\mathbb{A}_1} \qquad \dfrac{}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3}\mathbb{A}_1)}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}
$$

$$
\overline{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\mathbb{A}_1 \quad = \quad \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \}
$$

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ :\mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ :\mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ :\mathbb{A}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\bar{x}_3[\bar{x}_0,\bar{x}_1] \vdash}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3}\mathbb{A}_1)}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

$$\mathbb{A}_1 \quad = \quad \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \}$$

Exemple

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash \ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash \ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash \ : \mathbb{A}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1)}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{\dfrac{x \vdash}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}}
$$

$$\mathbb{A}_1 \quad = \quad \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \}$$

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash \; : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash \; : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash \; : \mathbb{A}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1)}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

$$\mathbb{A}_1 \quad = \quad \{ \ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3] \ \}$$

Exemple

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash \ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash \ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash \ : \mathbb{A}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash \ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{\vdash (\texttt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1)}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{A}_1 & = & \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\}
\end{array}
$$

Exemple

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1)}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}_1 &= \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 &= \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\}
\end{aligned}
$$

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1)}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 &= \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\ \mathbb{A}_2 &= \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \end{aligned}$$

Exemple

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x_5 \vdash \;: \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash \;: \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash \;: \mathbb{A}_1} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{x_7 \vdash \;: \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash \;: \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash \;: \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1)}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{A}_1 & = & \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\ \mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \end{array}$$

Exemple

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash \ :\mathbb{A}_1}{x_4 \vdash \ :\mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash \ :\mathbb{A}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash \ :\mathbb{A}_2}{x_6 \vdash \ :\mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0,\bar{x}_1] \vdash \ :\mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3}\mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}}{x_2 \vdash}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{A}_1 & = & \{\ \emptyset[\bar{x}_0,\bar{x}_1,x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0,\bar{x}_1]\}
\end{array}
$$

Exemple

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}}{x_2 \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_1 \vdash}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{A}_1 & = & \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\}
\end{array}
$$

Exemple

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}}{x_2 \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_1 \vdash\ : \mathbb{A}_3}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{A}_1 & = & \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 & = & (\mathtt{Shift}_{x_2,x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{\ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\ ,\ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0]\ \}
\end{array}
$$

Exemple

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{\dfrac{x_5 \vdash \ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash \ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash \ : \mathbb{A}_1}
        \qquad
        \dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash \ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash \ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash \ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}
      }{x_2 \vdash \ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}
    }{\bar{x}_1 \vdash \ : \mathbb{A}_3}
    \qquad
    \dfrac{}{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3)}
  }{x \vdash}
}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{A}_1 & = & \{ \ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3] \ \} \\
\mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 & = & (\mathtt{Shift}_{x_2,x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{ \ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \, , \ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0] \ \}
\end{array}
$$

Exemple

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}
}{x_2 \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}
}{\bar{x}_1 \vdash\ : \mathbb{A}_3}
}{x \vdash}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{x_1[\bar{x}_0] \vdash}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3)}
}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}_1 &= \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 &= \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 &= (\mathtt{Shift}_{x_2, x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{\ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\ ,\ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0]\ \}
\end{aligned}
$$

Exemple

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}}{x_2 \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_1 \vdash\ : \mathbb{A}_3} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1[\bar{x}_0] \vdash}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3)}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{A}_1 & = & \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 & = & (\mathtt{Shift}_{x_2, x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{\ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\ ,\ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0]\ \}
\end{array}
$$

Exemple

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1}
      \qquad
      \dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}
    }{x_2 \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}
  }{\bar{x}_1 \vdash\ : \mathbb{A}_3}
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1[\bar{x}_0] \vdash}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3)}
}{
  \dfrac{x \vdash}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}_1 &= \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 &= \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 &= (\mathtt{Shift}_{x_2, x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{\ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\ ,\ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0]\ \}
\end{aligned}
$$

Exemple

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}}{x_2 \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_1 \vdash\ : \mathbb{A}_3} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1[\bar{x}_0] \vdash}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3)}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{A}_1 & = & \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 & = & (\mathtt{Shift}_{x_2, x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{\ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\ ,\ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0]\ \}
\end{array}
$$

Exemple

$$
\frac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1}
      \qquad
      \dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}
    }{x_2 \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}
  }{\bar{x}_1 \vdash\ : \mathbb{A}_3}
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_4}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1[\bar{x}_0] \vdash}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3)}
}{
  \dfrac{x \vdash}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{A}_1 & = & \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 & = & (\mathtt{Shift}_{x_2,x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{\ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\ ,\ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0]\ \} \\
\mathbb{A}_4 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, x]\}
\end{array}
$$

Exemple

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1}
    \qquad
    \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}}
    {x_2 \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}
  }{\bar{x}_1 \vdash\ : \mathbb{A}_3}
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_4}{x_6 \vdash}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1[\bar{x}_0] \vdash}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3)}
}{
  \dfrac{x \vdash}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{A}_1 & = & \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 & = & (\mathtt{Shift}_{x_2,x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{\ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\ ,\ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0]\ \} \\
\mathbb{A}_4 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, x]\}
\end{array}
$$

Exemple

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash \;:\mathbb{A}_1}{x_4 \vdash \;:\mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash \;:\mathbb{A}_1}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash \;:\mathbb{A}_2}{x_6 \vdash \;:\mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0,\bar{x}_1] \vdash \;:\mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3}\mathbb{A}_1):\mathbb{A}_2}
}{x_2 \vdash \;:(\mathtt{Shift}_{x_3}\mathbb{A}_1)\cup\mathbb{A}_2}
}{\bar{x}_1 \vdash \;:\mathbb{A}_3}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash \;:\mathbb{A}_4}{x_6 \vdash \;:\mathbb{A}_4}}{\bar{x}_3 \vdash}}{x_1[\bar{x}_0] \vdash}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1}\mathbb{A}_3)}
}{x \vdash}
}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{A}_1 & = & \{\ \emptyset[\bar{x}_0,\bar{x}_1,x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0,\bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 & = & (\mathtt{Shift}_{x_2,x_3}\mathbb{A}_1)\cup(\mathtt{Shift}_{x_2}\mathbb{A}_2) = \{\ \bar{x}_3[\bar{x}_0,\bar{x}_1]\,,\ \emptyset[\bar{x}_1,\bar{x}_0]\ \} \\
\mathbb{A}_4 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0,x]\}
\end{array}
$$

Exemple

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash \ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash \ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash \ : \mathbb{A}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash \ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash \ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash \ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}}{x_2 \vdash \ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_1 \vdash \ : \mathbb{A}_3} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash \ : \mathbb{A}_4}{x_6 \vdash \ : \mathbb{A}_4}}{\bar{x}_3 \vdash \ : \mathbb{A}_4}}{x_1[\bar{x}_0] \vdash}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3)}}{x \vdash}}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}_1 &= \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 &= \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 &= (\mathtt{Shift}_{x_2, x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{\ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\ ,\ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0]\ \} \\
\mathbb{A}_4 &= \{\emptyset[\bar{x}_0, x]\}
\end{aligned}
$$

Exemple

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{x_5 \vdash \ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash \ : \mathbb{A}_1}
      }{x_3 \vdash \ : \mathbb{A}_1}
      \qquad
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{x_7 \vdash \ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash \ : \mathbb{A}_2}
        }{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash \ : \mathbb{A}_2}
      }{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}
    }{x_2 \vdash \ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}
  }{\bar{x}_1 \vdash \ : \mathbb{A}_3}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{x_7 \vdash \ : \mathbb{A}_4}{x_6 \vdash \ : \mathbb{A}_4}
      }{\bar{x}_3 \vdash \ : \mathbb{A}_4}
    }{x_1[\bar{x}_0] \vdash \ : \mathbb{A}_4}
  }{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3)}
}{
  \dfrac{x \vdash}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{A}_1 & = & \{ \ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3] \ \} \\
\mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 & = & (\mathtt{Shift}_{x_2,x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{ \ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \, , \ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0] \ \} \\
\mathbb{A}_4 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, x]\}
\end{array}
$$

Exemple

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1}
        \quad
        \dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}
      }{x_2 \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}
    }{\bar{x}_1 \vdash\ : \mathbb{A}_3}
    \quad
    \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_4}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{\bar{x}_3 \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{x_1[\bar{x}_0] \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3) : \mathbb{A}_4}
  }{x \vdash}
}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{A}_1 & = & \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 & = & (\mathtt{Shift}_{x_2, x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{\ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\ ,\ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0]\ \} \\
\mathbb{A}_4 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, x]\}
\end{array}
$$

Exemple

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}
}{x_2 \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}
}{\bar{x}_1 \vdash\ : \mathbb{A}_3}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_4}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{\bar{x}_3 \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{x_1[\bar{x}_0] \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3) : \mathbb{A}_4}
}{x \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3) \cup \mathbb{A}_4}
}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{A}_1 & = & \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 & = & (\mathtt{Shift}_{x_2, x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{\ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\ ,\ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0]\ \} \\
\mathbb{A}_4 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, x]\}
\end{array}
$$

Exemple

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}
}{x_2 \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}
}{\bar{x}_1 \vdash\ : \mathbb{A}_3}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_4}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{\bar{x}_3 \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{x_1[\bar{x}_0] \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3) : \mathbb{A}_4}
}{x \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3) \cup \mathbb{A}_4}
\qquad
\dfrac{}{\vdash \mathbb{A}_5}
}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}_1 &= \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 &= \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 &= (\mathtt{Shift}_{x_2,x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{\ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\ ,\ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0]\ \} \\
\mathbb{A}_4 &= \{\emptyset[\bar{x}_0, x]\} \\
\mathbb{A}_5 &= (\mathtt{Shift}_{x,\bar{x}_1} \mathbb{A}_3) \cup (\mathtt{Shift}_{x} \mathbb{A}_4) = \{\ \{x_1, \bar{x}_3\}[\bar{x}_0]\ ,\ x_1[\bar{x}_0]\ ,\ \bar{x}[\bar{x}_0]\ \}
\end{aligned}
$$

Exemple

$$
\frac{
\frac{
\frac{
\frac{\frac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1}
\qquad
\frac{\frac{\frac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}
}{x_2 \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}
}{\bar{x}_1 \vdash\ : \mathbb{A}_3}
\qquad
\frac{\frac{\frac{\frac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_4}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{\bar{x}_3 \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{x_1[\bar{x}_0] \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3) : \mathbb{A}_4}
}{x \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3) \cup \mathbb{A}_4}
\qquad
\frac{\frac{}{\bar{x}[\bar{x}_0] \vdash}}{\vdash \mathbb{A}_5}
}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{A}_1 & = & \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 & = & (\mathtt{Shift}_{x_2, x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{\ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\ ,\ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0]\ \} \\
\mathbb{A}_4 & = & \{\emptyset[\bar{x}_0, x]\} \\
\mathbb{A}_5 & = & (\mathtt{Shift}_{x, \bar{x}_1} \mathbb{A}_3) \cup (\mathtt{Shift}_{x} \mathbb{A}_4) = \{\ \{x_1, \bar{x}_3\}[\bar{x}_0]\ ,\ x_1[\bar{x}_0]\ ,\ \bar{x}[\bar{x}_0]\ \}
\end{array}
$$

Exemple

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{x_5 \vdash\ : \mathbb{A}_1}{x_4 \vdash\ : \mathbb{A}_1}}{x_3 \vdash\ : \mathbb{A}_1}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_2}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \vdash\ : \mathbb{A}_2}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) : \mathbb{A}_2}
}{x_2 \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{x_3} \mathbb{A}_1) \cup \mathbb{A}_2}
}{\bar{x}_1 \vdash\ : \mathbb{A}_3}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_7 \vdash\ : \mathbb{A}_4}{x_6 \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{\bar{x}_3 \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{x_1[\bar{x}_0] \vdash\ : \mathbb{A}_4}}{\vdash (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3) : \mathbb{A}_4}
}{x \vdash\ : (\mathtt{Shift}_{\bar{x}_1} \mathbb{A}_3) \cup \mathbb{A}_4}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\bar{x}_1[\bar{x}_0] \vdash}}{\bar{x}[\bar{x}_0] \vdash}}{\vdash \mathbb{A}_5}
}{\bar{x}_0[\bar{x}_0] \vdash}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}_1 &= \{\ \emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_3]\ \} \\
\mathbb{A}_2 &= \{\emptyset[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\} \\
\mathbb{A}_3 &= (\mathtt{Shift}_{x_2,x_3} \mathbb{A}_1) \cup (\mathtt{Shift}_{x_2} \mathbb{A}_2) = \{\ \bar{x}_3[\bar{x}_0, \bar{x}_1]\ ,\ \emptyset[\bar{x}_1, \bar{x}_0]\ \} \\
\mathbb{A}_4 &= \{\emptyset[\bar{x}_0, x]\} \\
\mathbb{A}_5 &= (\mathtt{Shift}_{x,\bar{x}_1} \mathbb{A}_3) \cup (\mathtt{Shift}_{x} \mathbb{A}_4) = \{\ \{x_1, \bar{x}_3\}[\bar{x}_0]\ ,\ x_1[\bar{x}_0]\ ,\ \bar{x}[\bar{x}_0]\ \}
\end{aligned}
$$

Efficacité des optimisations (Pentium 4 2GHz 512Mo)

Le tableau ci-dessous récapitule les résultats obtenus avec un *SAT-solver* implantant le backtracking non-chronologique et l'apprentissage.

	DPLL	DPLL-B	DPLL-C	bj(max)	cc
aim-50 (50,80)	4s	40ms	4ms	28(14)	56
aim-100 (100,200)	$>$ 10m	33s	0.3s	1491(27)	2806
aim-200 (200,400)	$>$ 10m	7m	4s	7837(45)	150e2
uf-125 (125,538)	22s	12s	10s	8489(14)	150e2
dubois (66,176)	8m30s	47s	52s	300e3(20)	600e3

$$\textbf{BRed} \quad \frac{\Gamma \vdash_T \Delta, C[\mathcal{C} \cup \mathcal{B}] : \mathcal{A}}{\Gamma \vdash_T \Delta, \bar{l} \vee C[\mathcal{C}] : \mathcal{A}} \quad \boxed{T, \Gamma \vdash l : \mathcal{B}}$$

Le problème de la mise en CNF

La mise en CNF de $(a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee \cdots \vee (a_n \wedge b_n)$ produit 2^n clauses.

On évite l'explosion en remplaçant chaque sous-formules $a_i \wedge b_i$ par une variable, on obtient :

$$X_1 \vee X_2 \vee \cdots \vee X_n$$

et on ajoute les clauses pour $X_i \leftrightarrow (a_i \wedge b_i)$ soit

$$(\bar{a}_i \vee \bar{b}_i \vee X_i) \wedge (\bar{X}_i \vee a_i) \wedge (\bar{X}_i \vee b_i)$$

Nous allons voir comment la technique de *hash-consing* peut être utilisée pour résoudre de manière élégante ce problème.

Interaction entre CNF équisatisfiables et SAT-solver

On restreint l'espace de recherche en ajoutant les clauses $X_i \leftrightarrow (a_i \wedge b_i)$ dans l'état du SAT solveur au moment où X_i ou $\bar{X}_i$ est supposé.

Proxy	X asserted	$\neg X$ asserted
$X \leftrightarrow Y \wedge Z$	$\{Y\}$ $\{Z\}$	$\{\neg Y \vee \neg Z\}$
$X \leftrightarrow Y \vee Z$	$\{Y \vee Z\}$	$\{\neg Y\}$ $\{\neg Z\}$
$X \leftrightarrow (Y \rightarrow Z)$	$\{\neg Y \vee Z\}$	$\{Y\}$ $\{\neg Z\}$

La signature du module Cnf

```
module type CNF = sig
  type t
  type pclause = U of t×t | C of t×t | L of string × bool
  type view = { pos : pclause ; neg : pclause}

  val equal : t → t → bool

  val view : t → view
  val mk_atom : string → t
  val mk_not : t → t
  val mk_and : t → t → t
  val mk_or : t → t → t
  val mk_imp : t → t → t
end
```

Une bibliothèque de hash-consing générique (J-C. Filliâtre)

```
type α hash_consed = private {
  node : α ;
  tag : int ;
  hkey : int }

module type HashedType = sig
  type t
  val equal: t × t → bool
  val hash: t → int
end

module Make(H : HashedType) : sig
  type t
  val create : int → t
  val hashcons : t → H.t → H.t hash_consed
end
```

L'implantation du module Cnf

```
type pclause = C of t×t | U of t×t | L of string×bool
and view = { pos : pclause ; neg : pclause}
and t = view Hashcons.hash_consed

module View = struct
  open Hashcons
  type t = view

  let eqc c1 c2 = match c1,c2 with
      U(f1,f2) , U(g1,g2) | C(f1,f2) , C(g1,g2) →
       f1==g1 && f2==g2 || f1==g2 && f2==g1
    | L(x1,b1) , L(x2,b2) → x1=x2 && b1=b2
    | _ → false
  let equal f1 f2 = eqc f1.pos f2.pos && eqc f1.neg f2.neg
  let hash f = ...
end
```

L'implantation du module Cnf

```
module H = Hashcons.Make(View)

open Hashcons
let tbl = H.create 251
let view t = t.node
let compare f1 f2 = compare f1.tag f2.tag
let equal f1 f2 = f1.tag == f2.tag

let mk_atom a =
  H.hashcons tbl ({pos=L(a,true);neg=L(a,false)})
let mk_not f = let f = view f in
  H.hashcons tbl ({pos=f.neg;neg=f.pos})
let mk_and f1 f2 = if equal f1 f2 then f1 else
  H.hashcons tbl {pos=U(f1,f2); neg=C(mk_not f1,mk_not f2)}
...
```

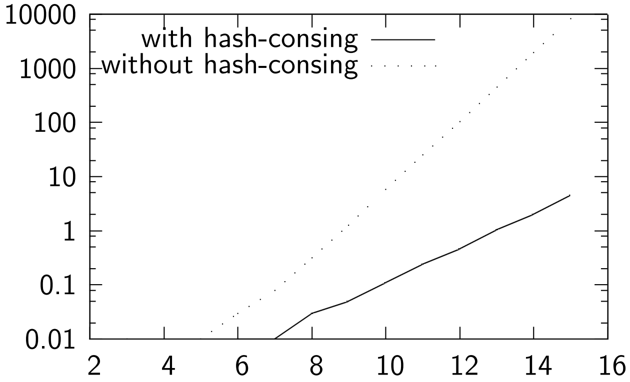
```
module S = Set.Make(Cnf)
type t = { gamma : S.t ;
           delta : (Cnf.t×Cnf.t) list}

let rec assume env f = (* unit *)
  if S.mem (mk_not f) env.gamma then raise Unsat ;
  if S.mem f env.gamma then env
  else
   let env = { env with gamma = S.add f env.gamma } in
   match view f with
     Proxy {pos=U(f1,f2)} → assume (assume env f1) f2
   | Proxy {pos=C(f1,f2)} →
       bcp { env with delta=(f1,f2) ::env.delta }
   | _ → bcp env
```

Le module Sat

```
and bcp env = (* red + elim *)
 let cl , u = List.fold_left
  (fun (cl,u) (f1,f2) →
   if S.mem f1 env.gamma || S.mem f2 env.gamma then (cl,u)
   else if S.mem (mk_not f1) env.gamma then (cl,f2 ::u)
   else if S.mem (mk_not f2) env.gamma then (cl,f1 ::u)
   else (f1,f2) ::cl , u ) ([],[]) env.delta
 in List.fold_left assume {env with delta=cl} u
let rec unsat f env = try  (* split *)
  let env = assume env f in match env.delta with
    [] → raise Sat
  | (a,b) ::l →
     sat a {env with delta=l};
     sat (mk_not a) (assume {env with delta=l} b)
 with Unsat → ()
```

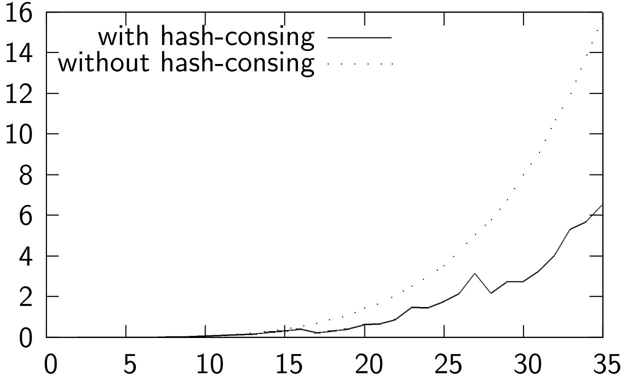
Benchmarks

$$deb(n) = \left(\bigwedge_{i=0}^{2n} (p_i \leftrightarrow p_{i+1 \bmod 2n}) \to c \right) \to c$$



Benchmarks

$$ph(n) = \left(\bigwedge_{p=1}^{n+1} \bigvee_{h=1}^{n} x_{p,h}\right) \rightarrow \bigvee_{h=1}^{h} \bigvee_{p=1}^{n+1} \bigvee_{q=1}^{n+1} x_{p,h} \wedge x_{q,h}$$



Traitement de l'égalité

La théorie de l'égalité avec symboles non interprétés

Cette théorie, notée $\mathcal{E}$, est basée sur la signature suivante :

$$\Sigma = \{=, \neq, f, g, \ldots\}$$

Elle est définie par les axiomes suivants :

Réflexivité : $\forall x. x = x$

Symétrie : $\forall xy. x = y \longrightarrow y = x$

Transitivité : $\forall xyz. x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z$

Congruence : pour tout symbole f de Σ, $\forall xy. x = y \longrightarrow f(x) = f(y)$

Exemples déjà rencontrés

$$g(y, x) = y \longrightarrow g(g(y, x), x) = y$$

$$f(f(f(a))) = a \wedge f(f(f(f(f(a))))) = a \longrightarrow f(a) = a$$

Fermeture par congruence (Congruence Closure)

1. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur les termes.
2. On note $\texttt{dom}(\mathcal{R})$ le **domaine** de $\mathcal{R}$, i.e. l'ensemble des termes t tel qu'il existe une paire $(t, t') \in \mathcal{R}$, et on suppose que le domaine de $\mathcal{R}$ contient tous les sous-termes de chacun de ses termes.

Definition (Congruence)

Deux termes t et u sont **congruents par** $\mathcal{R}$ s'ils sont respectivement de la forme $\mathbf{f}(\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n})$ et $\mathbf{f}(\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n})$ et que $(\mathbf{t_i}, \mathbf{u_i}) \in \mathcal{R}$ pour tout i.

$\mathcal{R}$ est **close par congruence** si pour tous termes $t, u \in \texttt{dom}(\mathcal{R})$ et congruent par $\mathcal{R}$ on a $(t, u) \in \mathcal{R}$.

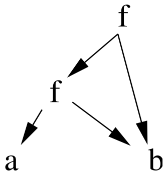
Definition (Fermeture par congruence)

La fermeture par congruence de $\mathcal{R}$ est la **plus petite** relation contenant $\mathcal{R}$ et close par **congruence**.

Représentation des termes et de la relation d'égalité

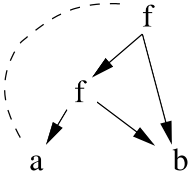
1. Les termes sont représentés par des **DAGs** (directed acyclic graph) afin de représenter le partage (et donc la partie réflexive de la relation $\mathcal{R}$).

   Par exemple, le terme $f(f(a,b),b)$ est représenté par le DAG suivant :



Représentation des termes et de la relation d'égalité

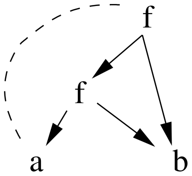
1. Les termes sont représentés par des **DAGs** (directed acyclic graph) afin de représenter le partage (et donc la partie réflexive de la relation $\mathcal{R}$).
   Par exemple, le terme $f(f(a,b),b)$ est représenté par le DAG suivant :



2. La relation $\mathcal{R}$ (sans la partie réflexive et transitive) est représentée par des lignes en **pointillées**. Par exemple, la représentation de $f(f(a,b),b) = a$.

Représentation des termes et de la relation d'égalité

1. Les termes sont représentés par des **DAGs** (directed acyclic graph) afin de représenter le partage (et donc la partie réflexive de la relation $\mathcal{R}$).
   Par exemple, le terme $f(f(a, b), b)$ est représenté par le DAG suivant :



2. La relation $\mathcal{R}$ (sans la partie réflexive et transitive) est représentée par des lignes en **pointillées**. Par exemple, la représentation de $f(f(a, b), b) = a$.
3. Un DAG qui contient également une relation d'équivalence est généralement appelé un E-DAG (equality DAG)

Calcul de la fermeture par congruence

L'implantation de la relation d'**équivalence** $\mathcal{R}$ (i.e. des lignes en pointillées) est réalisée à l'aide d'une structure de données **union-find** qui permet de construire des classes d'équivalence pour les noeuds du DAG.

1. $\texttt{find}(n)$ retourne le représentant de la classe du noeud n
2. $\texttt{union}(n, m)$ regroupe les classes d'équivalence de n et m.

L'algorithme (naïf) suivant permet de construire la fermeture par congruence d'une relation $\mathcal{R}$.

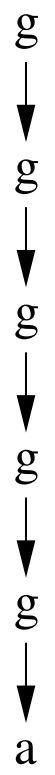
Pour chaque noeuds du DAG n et m tels que $\texttt{find}(n) \neq \texttt{find}(m)$,

1. si n et m sont étiquetés avec le même symbole ;
2. s'ils ont le même nombre de fils ;
3. si $\texttt{find}(n_i) = \texttt{find}(m_i)$ pour chacun des fils n_i de n et m_i de m.

Alors, on regroupe les classes de n et m par $\texttt{union}(n, m)$

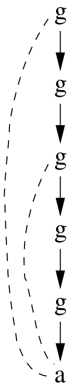
Exemple

Pour trouver que $g(g(g(a))) = a \wedge g(g(g(g(g(a))))) = a \longrightarrow g(a) = a$, on construit les DAGs suivants



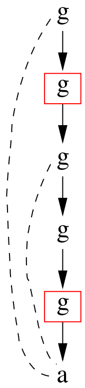
Exemple

Pour trouver que $g(g(g(a))) = a \wedge g(g(g(g(g(a))))) = a \longrightarrow g(a) = a$, on construit les DAGs suivants

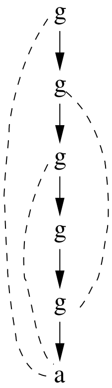


Exemple

Pour trouver que $g(g(g(a))) = a \wedge g(g(g(g(g(a))))) = a \longrightarrow g(a) = a$, on construit les DAGs suivants

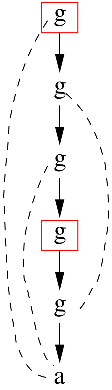


Pour trouver que $g(g(g(a))) = a \wedge g(g(g(g(g(a))))) = a \longrightarrow g(a) = a$, on construit les DAGs suivants



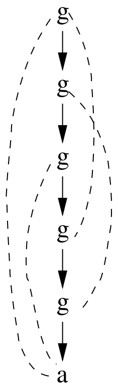
Exemple

Pour trouver que $g(g(g(a))) = a \wedge g(g(g(g(g(a))))) = a \longrightarrow g(a) = a$, on construit les DAGs suivants



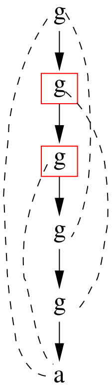
Exemple

Pour trouver que $g(g(g(a))) = a \wedge g(g(g(g(g(a))))) = a \longrightarrow g(a) = a$, on construit les DAGs suivants



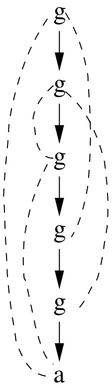
Exemple

Pour trouver que $g(g(g(a))) = a \wedge g(g(g(g(g(a))))) = a \longrightarrow g(a) = a$, on construit les DAGs suivants



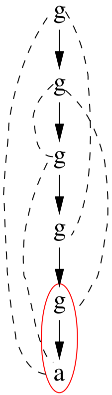
Exemple

Pour trouver que $g(g(g(a))) = a \wedge g(g(g(g(g(a))))) = a \longrightarrow g(a) = a$, on construit les DAGs suivants



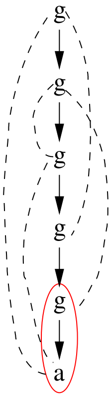
Exemple

Pour trouver que $g(g(g(a))) = a \wedge g(g(g(g(g(a))))) = a \longrightarrow g(a) = a$, on construit les DAGs suivants



Exemple

Pour trouver que $g(g(g(a))) = a \wedge g(g(g(g(g(a))))) = a \longrightarrow g(a) = a$, on construit les DAGs suivants



Par transitivité, on a bien $g(a) = a$ dans le E-DAG

Formalisation par règles d'inférence

Trois structures fondamentales

- Φ contient les équations closes à traiter
- Δ est une structure *union-find*
- Γ est un dictionnaire "est utilisé par".

$$\textsc{Congr}\ \frac{\langle \Phi \uplus \{u = v\} \mid \Delta \mid \Gamma \cup \{\Delta(u) \mapsto C, \Delta(v) \mapsto D\}\rangle}{\langle \Phi \cup \Phi' \mid \Delta' \mid \Gamma \cup \{\Delta'(u) \mapsto C \cup D\}\rangle}\ \Delta(u) \neq \Delta(v)$$

avec
$$\begin{array}{l} \Delta' = \Delta + \{u = v\} \\ \Phi' = \{f(\vec{u}) = f(\vec{v}) \mid f(\vec{u}) \in C \wedge f(\vec{v}) \in D \wedge \Delta(\vec{u}) = \Delta(\vec{v})\} \end{array}$$

$$\textsc{Remove}\ \frac{\langle \Phi \uplus \{u = v\} \mid \Delta \mid \Gamma\rangle}{\langle \Phi \mid \Delta \mid \Gamma\rangle}\ \Delta(u) = \Delta(v)$$

Preuve de correction

Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de termes clos par sous-termes et E un ensemble d'équations sur $\mathcal{T}$. On note $K_0 = \langle E \mid \texttt{id} \mid \Gamma_{\mathcal{T}} \rangle$ où $\Gamma_{\mathcal{T}}$ est le "DAG renversé" des sous-termes directs avec partage maximal et $K \rightarrow K'$ si une règle s'applique.

Terminaison de $\rightarrow$

On utilise la mesure (c, n) où c est le nombre de classes d'équivalence dans Δ et n le nombre d'équations dans Φ.

On montre aussi facilement qu'une configuration irréductible obtenue à partir de K_0 est de la forme $\langle \emptyset \mid \Delta \mid \Gamma \rangle$. On note $\langle \emptyset \mid \Delta_\infty \mid \Gamma_\infty \rangle$ les configurations irréductibles.
Soit $=_E$ la théorie équationnelle induite par E.

Preuve de correction (suite)

si $K_0 \longrightarrow^* \langle \emptyset \mid \Delta_\infty \mid \Gamma_\infty \rangle$ alors $\forall u, v \in \mathcal{T}, u =_E v$ ssi $\Delta_\infty(u) = \Delta_\infty(v)$

on prouve la direction $\leftarrow$ en montrant l'invariant :

$$I_1(\langle \Phi \mid \Delta \mid \Gamma \rangle) = \forall u, v \in T(\Sigma), \begin{cases} \Delta(u) = \Delta(v) \Rightarrow u =_E v \\ u = v \in \Phi \Rightarrow u =_E v \end{cases}$$

on prouve la direction $\rightarrow$ en montrant tout d'abord les deux invariants suivant, où $=_\Delta$ est l'ensemble $\{u = v \mid \Delta(u) = \Delta(v)\}$

$$\begin{aligned} I_2(\langle \Phi \mid \Delta \mid \Gamma \rangle) = &\ \forall t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma), \\ &\quad f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall i, f(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma(\Delta(t_i)) \\ I_3(\langle \Phi \mid \Delta \mid \Gamma \rangle) = &\ \forall u, v \in \mathcal{T}, u =_E v \Rightarrow (u, v) \in (=_\Phi \cup =_\Delta)^* \end{aligned}$$

puis par induction sur la taille de la preuve de $u =_{\Delta_\infty} v$ avec la propriété de congruence sur Δ_∞ suivante :

si $f(\vec{u}), f(\vec{v}) \in \mathcal{T}$ et $\Delta_\infty(\vec{u}) = \Delta_\infty(\vec{v})$ alors $\Delta_\infty(f(\vec{u})) = \Delta_\infty(f(\vec{v}))$.

Une règle de plus pour l'incrémentalité

$$\textsc{AddTerm}\ \frac{\langle C[f(\vec{a})];\Phi \mid \Delta \mid \Gamma \uplus \cup_{v\in\vec{a}}\{\Delta(v)\mapsto \mathcal{C}_v\}\rangle}{\langle \Phi'; C[f(\vec{a})];\Phi \mid \Delta \mid \Gamma \uplus \Gamma'\rangle}\ \Gamma(f(\vec{a})) = \bot$$

où $C[f(\vec{a})]$ représente une équation contenant le terme $f(\vec{a})$

avec $\left\{\begin{array}{ll} \Gamma' = & (f(\vec{a})\mapsto\{\}) + \{\Delta(v)\mapsto \mathcal{C}_v + f(\vec{a}) \mid v\in\vec{a}\} \\ \Phi' = & \left\{\ f(\vec{a}) = f(\vec{b}) \,\middle|\, v\in\vec{a}, f(\vec{b})\in C_v \wedge \Delta(\vec{a}) = \Delta(\vec{b})\ \right\} \end{array}\right.$

Traitement de l'arithmétique linéaire

La théorie de l'arithmétique linéaire

Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble fini de variables. Pour simplifier, les formules de cette théorie seront les inéquations $\mathcal{C}$ mises sous la forme canonique suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq a_0 \qquad \forall k \in 0..n, a_k \in \mathbb{Q}$$

Afin de définir une procédure de décision pour cette théorie, nous n'avons besoin que de deux opérations :

Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble fini de variables. Pour simplifier, les formules de cette théorie seront les inéquations $\mathcal{C}$ mises sous la forme canonique suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq a_0 \qquad \forall k \in 0..n, a_k \in \mathbb{Q}$$

Afin de définir une procédure de décision pour cette théorie, nous n'avons besoin que de deux opérations :

1. La multiplication d'une inéquation $\mathcal{C}$ par un rationnel α, notée $\alpha\mathcal{C}$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha a_i x_i \leq \alpha a_0$$

La théorie de l'arithmétique linéaire

Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble fini de variables. Pour simplifier, les formules de cette théorie seront les inéquations $\mathcal{C}$ mises sous la forme canonique suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq a_0 \qquad \forall k \in 0..n, a_k \in \mathbb{Q}$$

Afin de définir une procédure de décision pour cette théorie, nous n'avons besoin que de deux opérations :

1. La multiplication d'une inéquation $\mathcal{C}$ par un rationnel α, notée $\alpha\mathcal{C}$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha a_i x_i \leq \alpha a_0$$

2. L'addition de deux inéquations $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, notée $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{1,i} + a_{2,i}) x_i \leq a_0 + b_0$$

L'algorithme de Fourier-Motzkin

Soit $\mathcal{I} = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k\}$ un ensemble fini d'inéquations. Chaque étape de l'algorithme de **Fourier-Motzkin** consiste à éliminer une variable x de l'ensemble $\mathcal{I}$ apparaissant au moins une fois avec un coefficient non nul.

1. Si x n'apparaît qu'avec des coefficients de même signe dans $\mathcal{I}$ alors **supprimer** toutes les inéquations où x apparaît (avec un coefficient non nul).
2. Sinon, soit $\mathcal{I}^+$ (resp $\mathcal{I}^-$) le sous-ensemble des inéquations de $\mathcal{I}$ dans lesquelles x apparaît positivement (resp. négativement).
3. Calculer l'ensemble

$$\mathcal{I}_x = \bigcup_{\mathcal{C}\in\mathcal{I}^+,\mathcal{D}\in\mathcal{I}^-} \beta\mathcal{C} + \alpha\mathcal{D} \qquad \text{où } \alpha x \in \mathcal{C} \text{ et } -\beta x \in \mathcal{D}$$

4. Remplacer $\mathcal{I}$ par $\mathcal{I}' = \mathcal{I}_x \cup \mathcal{I}^0$ où $\mathcal{I}^0$ est le sous-ensemble des inéquations de $\mathcal{I}$ où x apparaît avec un coefficient nul.

Inférence d'égalités

Le résultat suivant permet d'inférer des égalités à partir d'un ensemble d'inégalités.

Theorem

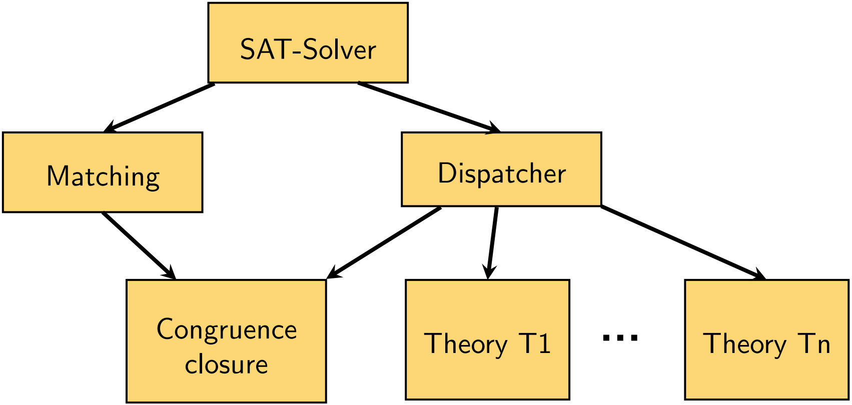
Si une combinaison strictement positive d'inéquations $\sum_{i\in 1..m} \alpha_i \mathcal{C}_i$ *est de la forme* $0 \leq 0$ *alors toutes les inéquations* $\mathcal{C}_i$ *sont des égalités.*

Il suffit alors de modifier légèrement l'algorithme de **Fourier-Motzkin** avec des informations de dépendance pour retrouver ces égalités.

1. Associer à chaque inéquation $\mathcal{C}_i$ un ensemble S_i contenant les inéquations grâce auxquelles elle a été dérivée.
2. Initialiser chaque inéquation $\mathcal{C}_i$ de l'ensemble de départ $\mathcal{I}$ avec un ensemble $S_i = \{\mathcal{C}_i\}$.
3. À chaque étape de calcul, associer l'ensemble $S_\mathcal{C} \cup S_\mathcal{D}$ à l'inéquation $\beta\mathcal{C} + \alpha\mathcal{D}$.

La combinaison des briques de base

Rappel : architecture d'un démonstrateur automatique pour la preuve de programmes



Théories du premier ordre

- Signature : ensemble de symboles de constantes, fonctions, prédicats

  ex. $\Sigma = \{+, -, 0, 1, f, \ldots, \leq, \leq\}$

Théories du premier ordre : termes

- Signature : ensemble de symboles de constantes, fonctions, prédicats

  ex. $\Sigma = \{+, -, 0, 1, f, \ldots, \leq, \leq\}$

- Σ-Termes : ils sont définis par la grammaire

  $$\mathtt{t} \ := \ x \ | \ \mathtt{c} \ | \ f(t_1, \ldots, t_n)$$

  avec X un ensemble dénombrable de variables, $x \in X$ et $c, f \in \Sigma$
  on note $T_\Sigma(X)$ l'ensemble des Σ-termes.

- **Signature :** ensemble de symboles de constantes, fonctions, prédicats

  ex. $\Sigma = \{+, -, 0, 1, f, \ldots, \leq, \leq\}$

- **Σ-Termes :** ils sont définis par la grammaire

  $$\mathtt{t} \ \mathtt{:=} \ x \ \mid \ \mathtt{c} \ \mid \ f(t_1, \ldots, t_n)$$

  avec X un ensemble dénombrable de variables, $x \in X$ et $c, f \in \Sigma$
  on note $T_\Sigma(X)$ l'ensemble des Σ-termes.

Les termes peuvent être vus comme des arbres. Les sous-termes d'un terme $\mathtt{t}$ peuvent donc être identifiés par leur position dans l'arbre.

- $\mathtt{t}_\pi$ le sous-terme de $\mathtt{t}$ à la position π
- $\mathtt{t}[\pi \mapsto \mathtt{t}']$ le remplacement de t_π par le terme t'

Théories du premier ordre : formules

- **Σ-Atomes :** égalités et applications de prédicats

$$\texttt{a} \; \texttt{:=} \; p(t_1, \ldots, t_n) \;\; \texttt{|} \;\; t_1 = t_2 \;\; \texttt{|} \;\; \texttt{true} \;\; \texttt{|} \;\; \texttt{false}$$

Théories du premier ordre : formules

- **Σ-Atomes :** égalités et applications de prédicats

$$\texttt{a} \ := \ p(t_1, \ldots, t_n) \ | \ t_1 = t_2 \ | \ \texttt{true} \ | \ \texttt{false}$$

- **Σ-Littéraux :** formules atomiques (positif) et leur négation (négatif)

$$\texttt{l} \ := \ \texttt{a} \ | \ \neg\texttt{a}$$

Si Δ est un ensemble de littéraux, on note Δ^+ (resp. Δ^-) le sous-ensemble des littéraux positifs (resp. négatifs) de Δ

Théories du premier ordre : formules

- **Σ-Atomes :** égalités et applications de prédicats

$$a \;:=\; p(t_1, \ldots, t_n) \;\mid\; t_1 = t_2 \;\mid\; \texttt{true} \;\mid\; \texttt{false}$$

- **Σ-Littéraux :** formules atomiques (positif) et leur négation (négatif)

$$\texttt{l} \;:=\; \texttt{a} \;\mid\; \neg\texttt{a}$$

  Si Δ est un ensemble de littéraux, on note Δ^+ (resp. Δ^-) le sous-ensemble des littéraux positifs (resp. négatifs) de Δ

- **Clauses :** disjonctions de littéraux (p-clause $= \bigvee$ littéraux positifs)

Théories du premier ordre : formules

- **Σ-Atomes :** égalités et applications de prédicats

$$\texttt{a} := p(t_1, \ldots, t_n) \mid t_1 = t_2 \mid \texttt{true} \mid \texttt{false}$$

- **Σ-Littéraux :** formules atomiques (positif) et leur négation (négatif)

$$\texttt{l} := \texttt{a} \mid \neg\texttt{a}$$

  Si Δ est un ensemble de littéraux, on note Δ^+ (resp. Δ^-) le sous-ensemble des littéraux positifs (resp. négatifs) de Δ

- **Clauses :** disjonctions de littéraux (p-clause = $\bigvee$ littéraux positifs)

- **Σ-Formules :** combinaison de littéraux avec les connecteurs suivants

$$\Phi := \texttt{l} \mid \Phi_1 \wedge \Phi_2 \mid \Phi_1 \vee \Phi_2 \mid \Phi_1 \longrightarrow \Phi_2 \mid \forall x \Phi \mid \exists x \Phi$$

Théories du premier ordre : formules

- **Σ-Atomes :** égalités et applications de prédicats

$$\texttt{a} \ := \ p(t_1, \ldots, t_n) \ \mid \ t_1 = t_2 \ \mid \ \texttt{true} \ \mid \ \texttt{false}$$

- **Σ-Littéraux :** formules atomiques (positif) et leur négation (négatif)

$$\texttt{l} \ := \ \texttt{a} \ \mid \ \neg\texttt{a}$$

  Si Δ est un ensemble de littéraux, on note Δ^+ (resp. Δ^-) le sous-ensemble des littéraux positifs (resp. négatifs) de Δ

- **Clauses :** disjonctions de littéraux (p-clause $= \bigvee$ littéraux positifs)
- **Σ-Formules :** combinaison de littéraux avec les connecteurs suivants

$$\Phi \ := \ \texttt{l} \ \mid \ \Phi_1 \wedge \Phi_2 \ \mid \ \Phi_1 \vee \Phi_2 \ \mid \ \Phi_1 \longrightarrow \Phi_2 \ \mid \ \forall x \Phi \ \mid \ \exists x \Phi$$

- **Σ−Théorie $\mathcal{T}$:** un ensemble de formules closes

- Σ-structure $\mathcal{A}$: un ensemble d'éléments, de fonctions et de prédicats qui interprètent les symboles de Σ

Théories du premier ordre : sémantique (I)

- **Σ-structure $\mathcal{A}$:** un ensemble d'éléments, de fonctions et de prédicats qui interprètent les symboles de Σ
- **$\mathcal{A}, \rho \models \Phi$:** Φ est vraie dans $\mathcal{A}$ pour l'affectation de variables ρ

Théories du premier ordre : sémantique (I)

- **Σ-structure $\mathcal{A}$:** un ensemble d'éléments, de fonctions et de prédicats qui interprètent les symboles de Σ
- **$\mathcal{A}, \rho \models \Phi$:** Φ est vraie dans $\mathcal{A}$ pour l'affectation de variables ρ
- **Φ est valide :** si $\mathcal{A}, \rho \models \Phi$ pour tout $\mathcal{A}$ et tout ρ

Théories du premier ordre : sémantique (I)

- Σ-structure $\mathcal{A}$: un ensemble d'éléments, de fonctions et de prédicats qui interprètent les symboles de Σ
- $\mathcal{A}, \rho \models \Phi$: Φ est vraie dans $\mathcal{A}$ pour l'affectation de variables ρ
- Φ est valide : si $\mathcal{A}, \rho \models \Phi$ pour tout $\mathcal{A}$ et tout ρ
- Φ est satisfiable : s'il existe une structure $\mathcal{A}$ et une affectation de variables ρ telles que $\mathcal{A}, \rho \models \Phi$. De manière équivalente, si X est l'ensemble des variables libres de Φ, $\mathcal{A} \models \exists X.\ \Phi$.

Théories du premier ordre : sémantique (II)

- Modèles d'une théorie $\mathcal{T}$: Σ-structures dans lesquelles toutes les formules de $\mathcal{T}$ sont vraies

Théories du premier ordre : sémantique (II)

- **Modèles d'une théorie $\mathcal{T}$:** Σ-structures dans lesquelles toutes les formules de $\mathcal{T}$ sont vraies
- **$\mathcal{T}$-satisfiabilité de Φ :** $\mathcal{T} \cup \{\Phi\}$ est satisfiable

Théories du premier ordre : sémantique (II)

- Modèles d'une théorie $\mathcal{T}$: Σ-structures dans lesquelles toutes les formules de $\mathcal{T}$ sont vraies
- $\mathcal{T}$-satisfiabilité de Φ : $\mathcal{T} \cup \{\Phi\}$ est satisfiable
- $\mathcal{T}$-validité : Φ est $\mathcal{T}$-valide, noté $\mathcal{T} \models \Phi$, si elle est valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$.

Théories du premier ordre : sémantique (II)

- **Modèles d'une théorie $\mathcal{T}$:** Σ-structures dans lesquelles toutes les formules de $\mathcal{T}$ sont vraies
- **$\mathcal{T}$-satisfiabilité de Φ :** $\mathcal{T} \cup \{\Phi\}$ est satisfiable
- **$\mathcal{T}$-validité :** Φ est $\mathcal{T}$-valide, noté $\mathcal{T} \models \Phi$, si elle est valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$.

Φ est $\mathcal{T}$-valide ssi $\neg\Phi$ n'est pas $\mathcal{T}$-satisfiable

Théories du premier ordre : sémantique (II)

- **Modèles d'une théorie $\mathcal{T}$:** Σ-structures dans lesquelles toutes les formules de $\mathcal{T}$ sont vraies
- **$\mathcal{T}$-satisfiabilité de Φ :** $\mathcal{T} \cup \{\Phi\}$ est satisfiable
- **$\mathcal{T}$-validité :** Φ est $\mathcal{T}$-valide, noté $\mathcal{T} \models \Phi$, si elle est valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$.

Φ est $\mathcal{T}$-valide ssi $\neg\Phi$ n'est pas $\mathcal{T}$-satisfiable

- **Théorie cohérente :** une théorie qui admet au moins un modèle

Théories du premier ordre : sémantique (II)

- **Modèles d'une théorie $\mathcal{T}$:** Σ-structures dans lesquelles toutes les formules de $\mathcal{T}$ sont vraies
- **$\mathcal{T}$-satisfiabilité de Φ :** $\mathcal{T} \cup \{\Phi\}$ est satisfiable
- **$\mathcal{T}$-validité :** Φ est $\mathcal{T}$-valide, noté $\mathcal{T} \models \Phi$, si elle est valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$.

Φ est $\mathcal{T}$-valide ssi $\neg\Phi$ n'est pas $\mathcal{T}$-satisfiable

- **Théorie cohérente :** une théorie qui admet au moins un modèle
- **Procédure de décision pour $\mathcal{T}$:** c'est un algorithme qui décide si une formule Φ est $\mathcal{T}$-valide (i.e. $\mathcal{T} \models \Phi$)

Combinaison de théories du premier ordre

Combinaison de procédures de décision

On note $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ l'union de théories $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ de signatures respectives Σ_1 et Σ_2.

Le problème de la combinaison de procédures de décision :

Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux théories cohérentes et Γ un ensemble de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$-littéraux. Peut-on déterminer si

$$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \models \Gamma\,?$$

sachant que pour tout ensemble de littéraux Γ_i de $\mathcal{T}_i$ on sait déterminer si $\mathcal{T}_i \models \Gamma_i$ (i.e. que l'on a une procédure de décision pour chaque $\mathcal{T}_i$).

Ce problème pose en fait les deux questions suivantes :

On note $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ l'union de théories $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ de signatures respectives Σ_1 et Σ_2.

Le problème de la combinaison de procédures de décision :

Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux théories cohérentes et Γ un ensemble de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$-littéraux. Peut-on déterminer si

$$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \models \Gamma\,?$$

sachant que pour tout ensemble de littéraux Γ_i de $\mathcal{T}_i$ on sait déterminer si $\mathcal{T}_i \models \Gamma_i$ (i.e. que l'on a une procédure de décision pour chaque $\mathcal{T}_i$).

Ce problème pose en fait les deux questions suivantes :

1. Est-ce que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ est cohérente si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ le sont ?

Combinaison de procédures de décision

On note $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ l'union de théories $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ de signatures respectives Σ_1 et Σ_2.

Le problème de la combinaison de procédures de décision :

Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux théories cohérentes et Γ un ensemble de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$-littéraux. Peut-on déterminer si

$$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \models \Gamma\,?$$

sachant que pour tout ensemble de littéraux Γ_i de $\mathcal{T}_i$ on sait déterminer si $\mathcal{T}_i \models \Gamma_i$ (i.e. que l'on a une procédure de décision pour chaque $\mathcal{T}_i$).

Ce problème pose en fait les deux questions suivantes :

1. Est-ce que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ est cohérente si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ le sont ?
2. Comment construire une procédure de décision pour $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ à partir des procédures de décision de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$?

Union de théories cohérentes (I)

Le fameux théorème de **Craig-Robinson** localise l'incohérence potentielle de l'union de deux théories cohérentes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ dans les formules partagées par ces deux théories.

Theorem (*Joint consistency theorem*)

$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ *est incohérente si et seulement si il existe une formule close* Φ *telle que* $\mathcal{T}_1 \models \Phi$ *et* $\mathcal{T}_2 \models \neg\Phi$.

Union de théories cohérentes (I)

Le fameux théorème de **Craig-Robinson** localise l'incohérence potentielle de l'union de deux théories cohérentes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ dans les formules partagées par ces deux théories.

Theorem (*Joint consistency theorem*)

$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ est incohérente si et seulement si il existe une formule close Φ telle que $\mathcal{T}_1 \models \Phi$ et $\mathcal{T}_2 \models \neg\Phi$.

Dans le cas où les signatures Σ_1 et Σ_2 sont disjointes, on peut montrer la propriété suivante :

Corollary (Tinelli - 1996)

L'union $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ est cohérente si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ admettent chacune un modèle de cardinalité infinie.

Union de théories cohérentes (II)

Démonstration.

1. Soient $\mathcal{A}_1$ un modèle de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{A}_2$ un modèle de $\mathcal{T}_2$. D'après le théorème de **Lówenheim-Skolem-Tarski**, si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ admettent un modèle infini alors elles admettent un modèle de n'importe quelle cardinalité infinie. On peut donc supposer que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ ont la même cardinalité.

Union de théories cohérentes (II)

Démonstration.

1. Soient $\mathcal{A}_1$ un modèle de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{A}_2$ un modèle de $\mathcal{T}_2$. D'après le théorème de **Lówenheim-Skolem-Tarski**, si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ admettent un modèle infini alors elles admettent un modèle de n'importe quelle cardinalité infinie. On peut donc supposer que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ ont la même cardinalité.
2. D'après le théorème de **Craig-Robinson**, si $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ est incohérente alors il existe Φ telle que $\mathcal{A}_1 \models \Phi$ et $\mathcal{A}_2 \models \neg\Phi$ (1).

Union de théories cohérentes (II)

Démonstration.

1. Soient $\mathcal{A}_1$ un modèle de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{A}_2$ un modèle de $\mathcal{T}_2$. D'après le théorème de **Lówenheim-Skolem-Tarski**, si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ admettent un modèle infini alors elles admettent un modèle de n'importe quelle cardinalité infinie. On peut donc supposer que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ ont la même cardinalité.
2. D'après le théorème de **Craig-Robinson**, si $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ est incohérente alors il existe Φ telle que $\mathcal{A}_1 \models \Phi$ et $\mathcal{A}_2 \models \neg\Phi$ (1).
3. Maintenant, puisque $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$, les formules de $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ sont des formules *simple*, i.e. que Φ est une formule composée uniquement de littéraux de la forme $x = y$ ou $x \neq y$.

Union de théories cohérentes (II)

Démonstration.

1. Soient $\mathcal{A}_1$ un modèle de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{A}_2$ un modèle de $\mathcal{T}_2$. D'après le théorème de **Lówenheim-Skolem-Tarski**, si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ admettent un modèle infini alors elles admettent un modèle de n'importe quelle cardinalité infinie. On peut donc supposer que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ ont la même cardinalité.
2. D'après le théorème de **Craig-Robinson**, si $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ est incohérente alors il existe Φ telle que $\mathcal{A}_1 \models \Phi$ et $\mathcal{A}_2 \models \neg\Phi$ (1).
3. Maintenant, puisque $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$, les formules de $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ sont des formules *simple*, i.e. que Φ est une formule composée uniquement de littéraux de la forme $x = y$ ou $x \neq y$.
4. Enfin, on montre facilement que les réduits de deux modèles à la signature vide qui ont la même cardinalité sont *isomorphes* (n'importe quelle bijection convient).Par conséquent, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont soit tous les deux des modèles de Φ ou aucun d'eux ne l'est, ce qui contredit (1).

Combinaison naïve (I)

Soit $\mathcal{A}$ la théorie de l'arithmétique linéaire et $\mathcal{T}$ la théorie définie par les deux axiomes suivants :

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} r(w(v,i,e),i) = e \\ i \neq j \Rightarrow r(w(v,i,e),j) = r(v,j) \end{array} \right.$$

Est-ce que la formule Φ suivante est $(\mathcal{A} \cup \mathcal{T})$-satisfiable ?

$$r(w(v,i,r(v,j)),i) \neq r(v,i) \wedge i + j \leq 2j \wedge j + 4i \leq 5i$$

Combinaison naïve (II)

1. On peut décomposer la formule Φ en deux sous-formules $\Phi_{\mathcal{A}}$ et $\Phi_{\mathcal{T}}$

$$\Phi_{\mathcal{A}} = i + j \leq 2j \wedge j + 4i \leq 5i$$
$$\Phi_{\mathcal{T}} = r(w(v, i, r(v, j)), i) \neq r(v, i)$$

Combinaison naïve (II)

1. On peut décomposer la formule Φ en deux sous-formules $\Phi_{\mathcal{A}}$ et $\Phi_{\mathcal{T}}$

$$\Phi_{\mathcal{A}} = i + j \leq 2j \wedge j + 4i \leq 5i$$
$$\Phi_{\mathcal{T}} = r(w(v, i, r(v, j)), i) \neq r(v, i)$$

2. Puis appliquer les procédures de décision de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{T}$ séparément sur $\Phi_{\mathcal{A}}$ et $\Phi_{\mathcal{T}}$ qui retournent satisfiable dans les deux cas.

Combinaison naïve (II)

1. On peut décomposer la formule Φ en deux sous-formules $\Phi_{\mathcal{A}}$ et $\Phi_{\mathcal{T}}$

$$\Phi_{\mathcal{A}} = i + j \leq 2j \wedge j + 4i \leq 5i$$
$$\Phi_{\mathcal{T}} = r(w(v, i, r(v, j)), i) \neq r(v, i)$$

2. Puis appliquer les procédures de décision de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{T}$ séparément sur $\Phi_{\mathcal{A}}$ et $\Phi_{\mathcal{T}}$ qui retournent satisfiable dans les deux cas.

Pour autant, est-ce que Φ est bien satifiable ?

Combinaison naïve (III)

En fait Φ n'est pas satisfiable, en effet :

$$i + j \leq 2j \wedge j + 4i \leq 5i \Rightarrow i = j$$

$$r(w(v, i, r(v, j)), i) \neq r(v, i) \wedge i = j \Rightarrow r(v, i) \neq r(v, i)$$

Le problème vient du fait que ces formules ne sont pas *indépendantes*. Elles partagent des **variables** ainsi que le **prédicat d'égalité**.

La solution adoptée par l'algorithme de Nelson-Oppen est de **propager** les contraintes d'égalité entre les variables partagées.

L'algorithme de Nelson-Oppen

Algorithme de Nelson-Oppen : vue globale du système

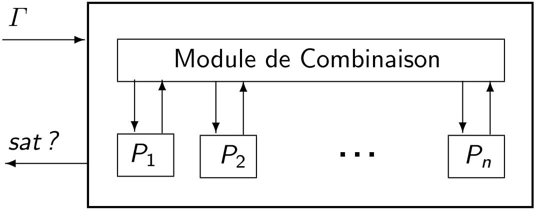
G. Nelson, D.C.Oppen *Simplification by cooperating decision procedures*, 1979

Entrée :

- théories $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$ à signatures disjointes $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$
- procédures de décision P_i décidant de la satisfiabilité d'un ensemble de $\mathcal{T}_i$-littéraux

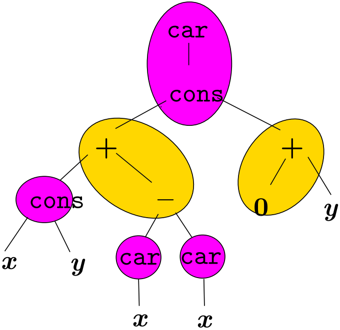
Sortie :

- une procédure de décision décidant la satisfiabilité d'un ensemble de $(\mathcal{T}_1 + \cdots + \mathcal{T}_n)$-littéraux.



Chaque littéral mixte

$w \quad \approx$



est équi-satisfiable avec un ensemble de littéraux pures :

$z_1 = \mathtt{car}(x)$ $\quad$ $z_2 = \mathtt{cons}(x, y)$ $\quad$ $z_3 = z_1 + (z_2 - z_2)$

$z_4 = 0 + y$ $\quad$ $z_5 = \mathtt{car}(\mathtt{cons}(z_3, z_4))$ $\quad$ $w = z_5$

L'algorithme de Nelson-Oppen : Étape 1

Variable Abstraction

Transformer l'ensemble Γ des littéraux (mixtes) en entrée en un ensemble équi-satisfiable $\Delta + \Phi_1 + \cdots + \Phi_n$ de littéraux pures, où Δ ne contient que des littéraux entre variables, et Φ_i ne contient que des symboles de $\mathcal{T}_i$.

Exemple. $\mathcal{T}_1$ est la théorie libre de f, $\mathcal{T}_2$ est la théorie de l'arithmétique linéaire, et Γ a deux littéraux : $f(x) = x$, $f(2x - f(x)) \neq x$.
Après l'étape 1, on a : :

Δ :	$y = x$	$u \neq x$
Φ_1 :	$y = f(x)$	$u = f(z)$
Φ_2 :	$z = 2x - y$	

Propagation des égalités

Saturer l'ensemble Δ avec les égalités entre variables retournées par chaque procédure P_i. Retourner "satisfiable" ssi tous les ensembles $\Delta \cup \Phi_i$ sont $\mathcal{T}_i$-satisfiables.

Exemple (suite).

Δ :	$y = x$	$u \neq x$	$z = x$
Φ_1 :	$y = f(x)$	$u = f(z)$	
Φ_2 :	$z = 2x - y$		

Inférer $z = x$ à partir de $\Delta \cup \Phi_2$; puis $\Delta \cup \Phi_1$ devient insatisfiable.

Les difficultés liées à l'algorithme de Nelson-Oppen

De nombreuses preuves de correction de l'algorithme de Nelson-Oppen ont été proposées. Parmi celles-ci, on distingue la preuve de

- **Tinelli-Harandi (1996)** : preuve de haut niveau d'une version non-déterministe de l'algorithme, plus simple et plus élégante que celle proposée initialement par Nelson-Oppen

Mais la preuve de correction devient difficile dès que l'on essaie de décrire l'algorithme à un niveau de précision expliquant des détails important d'implantation. Par exemple :

- **Clark Barrett (2002)** 400 lignes de pseudo-code annoté, pas de preuve de terminaison, une preuve de correction partielle de plus de 120 pages.

Le but de cette partie

Décrire cet algorithme à un niveau d'abstraction suffisamment haut pour que la preuve de correction soit simple, et suffisamment bas pour décrire les optimisations importantes faites dans les implantations.

- Un ensemble de règles d'inférence décrivant le système de Nelson-Oppen
- De nouvelles règles pour décrire les optimisations cruciales
- De multiples algorithmes de combinaison décrits comme des stratégies spécifiques d'application des règles
- Les optimisations à la Shostak

État de l'algorithme

Configurations

L'état est représenté par des *configurations* $\langle V \mathbin{[\!]} \Delta \mathbin{[\!]} \Gamma \mathbin{[\!]} \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle$

et son évolution est décrite par des **règles d'inférence**.

- Γ est un ensemble de littéraux de la forme $a = b$ ou $a \neq b$, où a et b appartiennent à la théorie $\mathcal{T}_1 + \cdots + \mathcal{T}_n$

État de l'algorithme

Configurations

L'état est représenté par des *configurations* $\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \parallel \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle$

et son évolution est décrite par des **règles d'inférence**.

- Γ est un ensemble de littéraux de la forme $a = b$ ou $a \neq b$, où a et b appartiennent à la théorie $\mathcal{T}_1 + \cdots + \mathcal{T}_n$
- Δ est un ensemble de littéraux de la forme $x = y$ ou $x \neq y$, où x et y sont des variables

État de l'algorithme

Configurations

L'état est représenté par des *configurations* $\langle V \,[\!]\, \Delta \,[\!]\, \Gamma \,[\!]\, \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle$

et son évolution est décrite par des **règles d'inférence**.

- Γ est un ensemble de littéraux de la forme $a = b$ ou $a \neq b$, où a et b appartiennent à la théorie $\mathcal{T}_1 + \cdots + \mathcal{T}_n$
- Δ est un ensemble de littéraux de la forme $x = y$ ou $x \neq y$, où x et y sont des variables
- Φ_i est un ensemble de $\mathcal{T}_i$-équations pures de la forme $x = a$

État de l'algorithme

Configurations

L'état est représenté par des *configurations* $\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \parallel \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle$

et son évolution est décrite par des **règles d'inférence**.

- Γ est un ensemble de littéraux de la forme $a = b$ ou $a \neq b$, où a et b appartiennent à la théorie $\mathcal{T}_1 + \cdots + \mathcal{T}_n$
- Δ est un ensemble de littéraux de la forme $x = y$ ou $x \neq y$, où x et y sont des variables
- Φ_i est un ensemble de $\mathcal{T}_i$-équations pures de la forme $x = a$
- V est un ensemble de variables contenant celles de Γ et Δ

Configurations

L'état est représenté par des *configurations* $\langle V \,[\!]\, \Delta \,[\!]\, \Gamma \,[\!]\, \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle$

et son évolution est décrite par des **règles d'inférence**.

- Γ est un ensemble de littéraux de la forme $a = b$ ou $a \neq b$, où a et b appartiennent à la théorie $\mathcal{T}_1 + \cdots + \mathcal{T}_n$
- Δ est un ensemble de littéraux de la forme $x = y$ ou $x \neq y$, où x et y sont des variables
- Φ_i est un ensemble de $\mathcal{T}_i$-équations pures de la forme $x = a$
- V est un ensemble de variables contenant celles de Γ et Δ

On utilisera également $\perp$ pour représenter une configuration particulière.

Abstract

$$\frac{\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \uplus \{a = b\} \parallel \ldots, \Phi_i, \ldots\rangle}{\langle V \cup \{z\} \parallel \Delta \parallel \Gamma \cup \{a[\pi \mapsto z] = b\} \parallel \ldots, \Phi_i \cup \{z = a_\pi\}, \ldots\rangle}$$

en supposant ❊ et que z est une variable fraîche

Share

$$\frac{\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \uplus \{a = b\} \parallel \Phi_1, \ldots, \Phi_n\rangle}{\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \cup \{a[\pi \mapsto z] = b\} \parallel \Phi_1, \ldots, \Phi_n\rangle}$$

en supposant ❊ et : $\mathcal{T}_i, \Phi_i, \Delta \models z = a_\pi$

❊ a_π est un pur $\mathcal{T}_i$-terme et $a_\pi \notin X$

Propagation des Égalités

Arrange
$$\frac{\langle V \mathbin{[\![} \Delta \mathbin{[\![} \Gamma \uplus \{x = y\} \mathbin{[\![} \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle}{\langle V \mathbin{[\![} \Delta \cup \{x = y\} \mathbin{[\![} \Gamma \mathbin{[\![} \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle}$$

Deduct
$$\frac{\langle V \mathbin{[\![} \Delta \mathbin{[\![} \Gamma \mathbin{[\![} \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle}{\langle V \mathbin{[\![} \Delta \cup x = y \mathbin{[\![} \Gamma \mathbin{[\![} \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle}$$

$\mathcal{T}_i, \Phi_i, \Delta \models x = y$ et $\Delta \not\models x = y$

Contradict
$$\frac{\langle V \mathbin{[\![} \Delta \mathbin{[\![} \Gamma \mathbin{[\![} \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle}{\bot}$$

$\Phi_i \wedge \Delta$ n'est par satisfiable

Exemple : $f(x) = x \longrightarrow f(2x - f(x)) = x$

V	Δ	Γ	Φ_1	Φ_2	Rule
x	$\emptyset$	$f(x) = x$ $f(2x - f(x)) \neq x$	$\emptyset$	$\emptyset$	
x, y	$\emptyset$	$y = x$ $f(2x - f(x)) \neq x$	$y = f(x)$	$\emptyset$	**Ab**$_1$
x, y	$y = x$	$f(2x - f(x)) \neq x$	$y = f(x)$	$\emptyset$	**Ar**
x, y	$y = x$	$f(2x - y) \neq x$	$y = f(x)$	$\emptyset$	**Sh**$_1$
x, y, z	$y = x$	$f(z) \neq x$	$y = f(x)$	$z = 2x - y$	**Ab**$_2$
x, y, z, u	$y = x$	$u \neq x$	$y = f(x)$ $u = f(z)$	$z = 2x - y$	**Ab**$_1$
x, y, z, u	$y = x$ $u \neq x$	$\emptyset$	$y = f(x)$ $u = f(z)$	$z = 2x - y$	**Ar**
x, y, z, u	$y = x$ $u \neq x$ $z = x$	$\emptyset$	$y = f(x)$ $u = f(z)$	$z = 2x - y$	**De**$_2$
$\perp$					**Co**$_1$

Théories convexes

La règle **Deduct** ne s'applique que s'il est toujours possible pour une théorie $\mathcal{T}_i$ d'inférer une **unique** égalité à partir de $\Phi_i \wedge \Delta$. Cette propriété est appelée **convexité**.

Definition (Théorie convexe)

Une théorie $\mathcal{T}$ est **convexe** si pour toute conjonction Γ de littéraux et tous termes $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$, si $\mathcal{T} \models \Gamma \Rightarrow a_1 = b_1 \vee \cdots \vee a_k = b_k$ alors il existe i tel que $\mathcal{T} \models \Gamma \Rightarrow a_i = b_i$.

Definition (Satisfiabilité)

Une configuration $\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \parallel \Phi_1, \dots, \Phi_n \rangle$ est **satisfiable** si la formule $\Gamma \wedge \Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n \wedge \Delta$ est satisfiable. La configuration $\bot$ est insatisfiable.

La satisfiabilité d'une conjonction de littéraux Γ est donc équivalente à la satisfiabilité de la configuration initiale $\langle V \parallel \emptyset \parallel \Gamma \parallel \emptyset \rangle$

On note $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}'$ la **réduction** de la configuration $\mathcal{C}$ vers la configuration $\mathcal{C}'$ par une des règles d'inférence. Une configuration qui ne peut se réduire est dite **irréductible** et elle est **propre** si elle est différente de $\bot$.

Theorem (Correction)

Un ensemble de littéraux Γ est satisfiable si et seulement si il existe une configuration irréductible et propre $\mathcal{C}$ telle que $\langle V \parallel \emptyset \parallel \Gamma \parallel \emptyset \rangle \Rightarrow^* \mathcal{C}$.

Correction de l'algorithme (II) : Terminaison

Lemma (terminaison)

La relation de réduction $\Rightarrow$ termine

Démonstration.

On mesure la complexité des configurations par

- la taille de Γ, i.e la somme des tailles de ses éléments.
- l'ensemble Δ, ordonné par l'ordre d'implication : $\Delta \succ \Delta'$ ssi $\Delta' \models \Delta$ et $\Delta \not\models \Delta'$.

Alors les règles **Abstract** et **Arrange** font décroître la première composante, alors que **Deduct** laisse Γ constant, ainsi que l'ensemble des variables de la configuration, et fait décroître Δ. On conclut en remarquant que pour un ensemble fixé de variables, l'ordre d'implication est bien fondé (car il n'y a qu'un nombre fini de Δ possibles !).
Enfin, la règle **Contradict** ne pose pas de problème puisqu'elle termine toujours une réduction. $\square$

Correction de l'algorithme (III) : Théorie à modèles finis

Soit $\mathcal{T}_1$ une Σ_1-théorie dont les modèles ont au plus 2 éléments et $\mathcal{T}_2$ une Σ_2-théorie admettant des modèles de cardinalité quelconque.

- Soient $f \in \Sigma_1$ et $g \in \Sigma_2$ avec

$$\mathcal{T}_1 \not\models \forall x, y. f(x) = f(y) \ \text{ et } \ \mathcal{T}_2 \not\models \forall x, y. g(x) = g(y)$$

- On considère l'ensemble Γ suivant

$$\Gamma = \{f(x) \neq f(y), g(x) \neq g(z), g(y) \neq g(z)\}$$

Partant de $\langle V \parallel \emptyset \parallel \Gamma \parallel \emptyset \rangle$, la configuration **finale** de l'algorithme est :

$$\langle V' \parallel \emptyset \parallel \Delta \parallel \Phi_1, \Phi_2 \rangle$$

avec

$$\begin{array}{l} \Delta = \{x_1 \neq y_1, x_2 \neq z_2, y_2 \neq z_2\} \\ \Phi_1 = \{x_1 = f(x), y_1 = f(y)\} \\ \Phi_2 = \{x_2 = g(x), y_2 = g(y), z_2 = g(z)\} \end{array}$$

Correction de l'algorithme (III) : Théorie à modèles finis

Maintenant, puisque seules les variables x et y sont partagées par les deux théories, les seules égalités potentiellement partagées sont $x = y$ ou $x \neq y$.

- $x = y$ est impossible car la procédure atteint l'état $\perp$ avec cette équation
- avec $x \neq y$, $\Delta \cup \Phi_1$ et $\Delta \cup \Phi_2$ sont satifiables.

Malheureusement,

$$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \models \Gamma \Rightarrow x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z$$

donc Γ est insatisfiable puisque $\mathcal{T}$ (comme $\mathcal{T}_1$) ne peut admettre que des modèles d'au plus 2 éléments.

L'algorithme de Nelson-Oppen échoue donc dand ce cas !

Correction de l'algorithme (IV) : Théories stables-infinies

On ne pourra donc combiner, avec cet algorithme, que des théories admettant toujours au moins des modèles de cardinalité infinie.

Definition (Stable-infinie)

Une théorie $\mathcal{T}$ est stable-infinie si toute formule satisfiable admet un modèle infini.

Cette condition permet en outre de s'assurer que l'union de telles théories est cohérente, cf. corollaire de **Tinelli**.

Correction de l'algorithme (V) : Le théorème de Tinelli-Harandi

Definition (Arrangement)

Un arrangement $\Delta(V)$ d'un ensemble de variables V est un ensemble de formules de la forme $x = y$ ou $x \neq y$ tel que pour toute paire de variables $x, y \in V$ on ait $\Delta(V) \models x = y$ ou bien $\Delta(V) \models x \neq y$.

La preuve de correction de l'algorithme repose sur le théorème suivant :

Theorem (Tinelli-Harandi (1996))

Soient $\mathcal{T}_i$ une Σ_i-théorie stable-infinie et Φ_i un ensemble de Σ_i-littéraux avec $\bigcap \Sigma_i = \emptyset$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit V les variables partagées par les Φ_i et $\Delta(V)$ un arrangement. Si $\Phi_i \wedge \Delta(V)$ est $\mathcal{T}_i$-satisfiable pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ alors $\Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n$ est $(\mathcal{T}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{T}_n)$-satisfiable.

Correction de l'algorithme (VI) : Irréductibilité

Lemma (Irréductibilité)

Toute configuration irréductible propre est satisfiable

Démonstration.

Soit $\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \parallel \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle$ une telle configuration. Puisque **Abtract** et **Arrange** ne s'appliquent Γ doit être vide. Puisque **Contradict** ne s'appliquent pas, $\Delta \wedge \Phi_i$ est $\mathcal{T}_i$-satisfiable. Si $\Delta(V)$ est un arrangement on conclut par le Théorème de **Tinelli-Harandi**. Sinon, soit $\Delta' = \Delta \cup \{x_1 \neq y_1, \ldots, x_k \neq y_k\}$ l'extension *maximale* et *satisfiable* de Δ telle que $\Delta \not\models x_i \neq y_i$. $\Delta'(V)$ est un arrangement.
Si $\Phi_i \wedge \Delta'$ n'est pas $\mathcal{T}_i$-satisfiable alors $\mathcal{T}_i, \Phi_i \models \Delta^+ \longrightarrow \neg\Delta^- \vee \delta$ où δ est la clause $x_1 = y_1 \vee \cdots \vee x_k = y_k$. Puisque $\mathcal{T}_i$ est convexe, $\mathcal{T}_i, \Phi_i \models \Delta^+ \longrightarrow x = y$ où $x = y \in \neg\Delta^- \vee \delta$. Puisque **Deduct** ne s'applique pas, on a $\Delta \models x = y$ et donc (puisque $\Delta \models \Delta^-$) $\Delta \models \delta$, ce qui contredit la satisfiabilité de Δ'.

□

Correction de l'algorithme (VII) : Preuve finale

Lemma (equi-satisfiabilité)

Si $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}'$ alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont equi-satisfiables.

Théorème de correction final.

Il suffit de montrer que pour toute configuration $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ est satisfiable ssi il existe $\mathcal{C}'$ irréductible et propre telle que $\mathcal{C} \Rightarrow^* \mathcal{C}'$. On raisonne par induction par rapport à $\Rightarrow$, qui est bien-fondée grâce au lemme de terminaison.
Si $\mathcal{C}$ est irréductible, le lemme d'irréductibilité permet de conclure. Si $\mathcal{C}$ est réductible en $\mathcal{C}'$ on utilise le lemme d'equi-satisfiabilité et on conclut par l'hypothèse de récurrence sur $\mathcal{C}'$. □

Traitement des théories non-convexes (I)

Nous avons besoin de deux changements pour traiter le cas des théories non-convexes.

❶ On remplace

Deduct
$$\frac{\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \parallel \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle}{\langle V \parallel \Delta \cup x = y \parallel \Gamma \parallel \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle}$$

$$\mathcal{T}_i, \Phi_i, \Delta \models x = y \text{ et } \Delta \not\models x = y$$

par

Deduct
$$\frac{\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \parallel \Phi_0, \ldots, \Phi_n \rangle}{\langle V \parallel \Delta \cup \delta \parallel \Gamma \parallel \Phi_0, \ldots, \Phi_n \rangle}$$

$$\mathcal{T}_i, \Phi_i, \Delta \models \delta \text{ et } \Delta \not\models \delta$$

où δ est une disjonction d'égalités entre variables.

Traitement des théories non-convexes (II)

❷ Et on doit aussi ajouter une règle de branchement.

Branch

$$\frac{\langle V \parallel \Delta \uplus \{x_1 = y_1 \vee \cdots \vee x_k = y_k\} \parallel \Gamma \parallel \Phi_0, \ldots, \Phi_n\rangle}{\langle V \parallel \Delta \cup \{x_i = y_i\} \parallel \Gamma \parallel \Phi_0, \ldots, \Phi_n\rangle}$$

$$\Delta \not\models x_i = y_i \quad (1 \leq i \leq k)$$

L'énoncé du théorème de correction reste inchangé :

Theorem (Correction)

Un ensemble de littéraux Γ *est satisfiable si et seulement si il existe une configuration irréductible et propre* $\mathcal{C}$ *telle que* $\langle V \parallel \emptyset \parallel \Gamma \parallel \emptyset\rangle \Rightarrow^* \mathcal{C}$.

Traitement des théories non-convexes (II)

Les modifications à apporter aux lemmes (ou preuves) précédents sont les suivantes :

Preuve du lemme d'irréductibilité.

Δ est de la forme $\Delta^+ \wedge \Delta^-$ car **Branch** ne s'applique pas. Ensuite, de $\mathcal{T}_i, \Phi_i \models \Delta^+ \longrightarrow \neg\Delta^- \vee \delta$ on conclut directement que $\Delta \models \delta$ car **Deduct** ne s'applique pas. □

Lemma (equi-satisfiabilité)

Si $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}'$ par une règle autre que **Branch**, *alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont équi-satisfaisables.*

Traitement des théories non-convexes (III)

Enfin, on ajoute une propriété sur le branchement :

Lemma (Branchement)

Si $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}'$ par **Branch**, *alors*

- *Si $\mathcal{C}'$ est satisfiable, alors $\mathcal{C}$ est satisfiable.*
- *Si $\mathcal{C}$ est satisfiable, alors il existe une réduction par* **Branch** $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}''$ *telle que $\mathcal{C}''$ est satisfiable.*

La preuve finale est quasi inchangée :

Démonstration.

...
Si $\mathcal{C}$ est irréductible, le lemme d'irréductibilité permet de conclure. Si $\mathcal{C}$ est réductible en $\mathcal{C}'$, si c'est par une règle autre que **Branch**, on utilise le lemme d'equi-satisfiabilité et on conclut par l'hypothèse de récurrence sur $\mathcal{C}'$, et si c'est par **Branch** on utilise le lemme de branchement et on applique l'hypothèse de récurrence sur $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$. $\square$

Preuve du théorème de Tinelli-Harandi (I)

Theorem (Tinelli-Harandi (1996))

Soient $\mathcal{T}_1$ et Φ_1 (resp. $\mathcal{T}_2$ et Φ_2) une théorie stable-infinie et un ensemble de littéraux de signatures Σ_1 (resp. Σ_2) avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. Soit V les variables partagées par Φ_1 et Φ_2 et $\Delta(V)$ un arrangement. Si $\Phi_1 \wedge \Delta(V)$ (resp. $\Phi_2 \wedge \Delta(V)$) est $\mathcal{T}_1$-satisfiable (resp. $\mathcal{T}_2$-satisfiable) alors $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ est $(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)$-satisfiable.

La preuve du théorème repose sur le lemme d'**interpolation** de **Craig-Robinson** et sur deux propriétés importantes de la théorie vide $\mathcal{T}_\emptyset$ (celles des **formules simples** i.e. des formules dont les littéraux sont de la forme $x = y$ ou $x \neq y$).

Lemma (Interpolation de Craig-Robinson)

Si $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \models \Phi_2 \longrightarrow \Phi_2$, il existe une formule Ψ dont l'ensemble des variables libres est un sous-ensemble de V telle que $\mathcal{T}_1 \models \Phi_1 \longrightarrow \Psi$ et $\mathcal{T}_2 \models \Psi \longrightarrow \Phi_2$ (Ψ est appelée **interpolant***).*

Preuve du théorème de Tinelli-Harandi (II)

Si X est un ensemble de variables, on note $D(X)$ la formule suivante :

$$D(X) = \bigwedge_{x,y \in X, x \not\equiv y} x \neq y$$

Soit $\mathcal{A}$ un modèle de $\mathcal{T}_\emptyset$ et $\rho : X \to \mathcal{A}$ une interprétation des variables de X dans le modèle $\mathcal{A}$.

Lemma

Soit Φ est une formule simple et X est l'ensemble de ses variables libres. Si $\mathcal{A}, \rho \models D(X) \wedge \Phi$ alors $\mathcal{A} \models \forall X.\ (D(X) \longrightarrow \Phi)$.

Lemma

Si Φ est une formule simple close satisfiable dans un modèle infini de $\mathcal{T}_\emptyset$ alors elle est satisfiable dans tous les modèles infinis de $\mathcal{T}_\emptyset$.

Preuve du théorème de Tinelli-Harandi.

1. Soit σ la substitution obtenue à partir de $\Delta(V)$ qui remplace chaque variable par son représentant. L'ensemble des variables partagées par les $\Phi'_i = \Phi_i\sigma$ est donc maintenant $U \subseteq V$. Il est clair que $\Phi'_i \wedge \Delta(V)\sigma$ est toujours $\mathcal{T}_i$-satisfiable et que $\Delta(V)\sigma$ est équivalent à $D(U)$.

Preuve du théorème de Tinelli-Harandi.

1. Soit σ la substitution obtenue à partir de $\Delta(V)$ qui remplace chaque variable par son représentant. L'ensemble des variables partagées par les $\Phi'_i = \Phi_i\sigma$ est donc maintenant $U \subseteq V$. Il est clair que $\Phi'_i \wedge \Delta(V)\sigma$ est toujours $\mathcal{T}_i$-satisfiable et que $\Delta(V)\sigma$ est équivalent à $D(U)$.
2. Si $\Phi'_1 \wedge \Phi'_2$ est insatisfiable alors, $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \models \Phi'_1 \longrightarrow \neg\Phi'_2$ et, d'après le lemme d'interpolation, il existe une formule simple Ψ ayant un ensemble de variables libres $W \subseteq U$ telle que $\mathcal{T}_1 \models \Phi'_1 \longrightarrow \Psi$ et $\mathcal{T}_2 \models \Phi'_2 \longrightarrow \neg\Psi$.

Preuve du théorème de Tinelli-Harandi (III)

Preuve du théorème de Tinelli-Harandi.

1. Soit σ la substitution obtenue à partir de $\Delta(V)$ qui remplace chaque variable par son représentant. L'ensemble des variables partagées par les $\Phi'_i = \Phi_i\sigma$ est donc maintenant $U \subseteq V$. Il est clair que $\Phi'_i \wedge \Delta(V)\sigma$ est toujours $\mathcal{T}_i$-satisfiable et que $\Delta(V)\sigma$ est équivalent à $D(U)$.
2. Si $\Phi'_1 \wedge \Phi'_2$ est insatisfiable alors, $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \models \Phi'_1 \longrightarrow \neg\Phi'_2$ et, d'après le lemme d'interpolation, il existe une formule simple Ψ ayant un ensemble de variables libres $W \subseteq U$ telle que $\mathcal{T}_1 \models \Phi'_1 \longrightarrow \Psi$ et $\mathcal{T}_2 \models \Phi'_2 \longrightarrow \neg\Psi$.
3. Puisque $\mathcal{T}_1$ est stable-infinie $\Phi'_1 \wedge D(W)$ est satisfiable dans un modèle infini $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{T}_1$. Maintenant, $\mathcal{A}_1$ est également un modèle de $\mathcal{T}_\emptyset$, aussi d'après les lemmes sur $\mathcal{T}_\emptyset$, $\forall X.\ (D(W) \longrightarrow \Psi)$ est satisfiable dans tous les modèles infinis de $\mathcal{T}_\emptyset$. De la même manière on montre que $\forall X.\ (D(W) \longrightarrow \neg\Psi)$ est satisfiable dans tous les modèles infinis de $\mathcal{T}_\emptyset$: contradiction.

Des règles d'inférence vers une procédure de décision

Les trois propriétés suivantes du système de règles d'inférence permettent facilement de construire une procédure de décision :

1. D'après le lemme de terminaison et le lemme de **König** (tout arbre infini à branchement fini a une branche infinie), **l'arbre de dérivation** de $\Rightarrow$ à partir d'une configuration $\mathcal{C}$ est **fini**.

Des règles d'inférence vers une procédure de décision

Les trois propriétés suivantes du système de règles d'inférence permettent facilement de construire une procédure de décision :

1. D'après le lemme de terminaison et le lemme de **König** (tout arbre infini à branchement fini a une branche infinie), **l'arbre de dérivation** de $\Rightarrow$ à partir d'une configuration $\mathcal{C}$ est **fini**.
2. Ces feuilles sont des configurations irréductibles (dans le cas de théories convexes, toutes les feuilles sont soit $\perp$ soit différentes de $\perp$).

Des règles d'inférence vers une procédure de décision

Les trois propriétés suivantes du système de règles d'inférence permettent facilement de construire une procédure de décision :

1. D'après le lemme de terminaison et le lemme de **König** (tout arbre infini à branchement fini a une branche infinie), **l'arbre de dérivation** de $\Rightarrow$ à partir d'une configuration $\mathcal{C}$ est **fini**.
2. Ces feuilles sont des configurations irréductibles (dans le cas de théories convexes, toutes les feuilles sont soit $\bot$ soit différentes de $\bot$).
3. Une configuration $\mathcal{C}$ est satisfiable ssi il existe une feuille $\neq \bot$.

Procédure de décision

Soit $\mathcal{C}$ une configuration d'entrée, choisir $\mathcal{C}'$ telle que $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}'$, puis se rappeler récursivement sur $\mathcal{C}'$ et *backtracker* uniquement si **Branch** est utilisée.

Il nous faut donc une **stratégie** pour choisir $\mathcal{C}'$

Stratégies

Un simple langage d'expressions régulières suffit à exprimer quelques algorithmes :

$$\boxed{\mathbf{Ab}^* \cdot \mathbf{Ar}^* \cdot (\mathbf{Co} \oplus \mathbf{De})^*}$$

$$\boxed{(\mathbf{Sh} \oplus \mathbf{Ab})^* \cdot \mathbf{Ar}^* \cdot (\mathbf{Co} \oplus \mathbf{De})^*}$$

Ou mieux :

$$\boxed{(\mathbf{Ar} \oplus \mathbf{Sh} \oplus \mathbf{Ab})^* \cdot (\mathbf{Co} \oplus \mathbf{De})^*}$$

Les deux conditions suivantes sont suffisantes pour établir la complétude d'une stratégie e :

1. Pour toute configuration $\mathcal{C}$, il existe une configuration $\mathcal{C}'$ telle que $\mathcal{C} \Rightarrow_e \mathcal{C}'$, et toutes ces configurations $\mathcal{C}'$ sont irréductibles.

Stratégies

Un simple langage d'expressions régulières suffit à exprimer quelques algorithmes :

$$\mathbf{Ab}^* \cdot \mathbf{Ar}^* \cdot (\mathbf{Co} \oplus \mathbf{De})^*$$

$$(\mathbf{Sh} \oplus \mathbf{Ab})^* \cdot \mathbf{Ar}^* \cdot (\mathbf{Co} \oplus \mathbf{De})^*$$

Ou mieux :

$$(\mathbf{Ar} \oplus \mathbf{Sh} \oplus \mathbf{Ab})^* \cdot (\mathbf{Co} \oplus \mathbf{De})^*$$

Les deux conditions suivantes sont suffisantes pour établir la complétude d'une stratégie e :

1. Pour toute configuration $\mathcal{C}$, il existe une configuration $\mathcal{C}'$ telle que $\mathcal{C} \Rightarrow_e \mathcal{C}'$, et toutes ces configurations $\mathcal{C}'$ sont irréductibles.
2. Si $\mathcal{C}$ est satisfiable alors il existe une configuration satisfiable $\mathcal{C}'$ telle que $\mathcal{C} \Rightarrow_e \mathcal{C}'$ (cas non-convexe).

Cette preuve ne demande *habituellement* qu'un petit effort.

Sélection des égalités utiles (I)

Le mécanisme d'abstraction par variables peut introduire des équations inutiles dans le système. Par exemple, l'application de la règle **Abstract** sur le littéral `car(cons(t,4x+2))=a` introduit une équation `z=4x+2` qui est inutile puisque `car(cons(t,4x+2))=t`.

On utilise un mécanisme de dépendances entre variables pour se débarrasser de ces équations inutiles (sources d'inefficacité).

Configurations avec dépendances

On ajoute une relation $E \subseteq V \times V$ aux configurations pour tracer les dépendances $\langle (\mathbf{V}, \mathbf{E}) \parallel \Delta \parallel \Gamma \parallel \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle$

On considère alors les sous-ensembles de variables et d'équations utiles V^{util} et Φ_i^{util} de V et Φ_i, définis par :

$$\begin{array}{l} V^{util} = \{y \mid x\, E^*\, y \;\text{ et }\; x \in \mathtt{vars}(\Delta)\} \\ \Phi_i^{util} = \{y = a \in \Phi_i \mid y \in V^{util}\} \end{array}$$

Sélection des égalités utiles (II)

Nous avons besoin de remplacer trois règles pour n'utiliser que les variables et les équations utiles dans le système.

1. La règle **Abstract** devient **Abstract**^{util}

Abstract^{util}

$$\frac{\langle (V, E) \,[\!]\, \Delta \,[\!]\, \Gamma \uplus \{a = b\} \,[\!]\, \ldots, \Phi_i, \ldots \rangle}{\langle (V \cup \{z\}, E \cup E') \,[\!]\, \Delta \,[\!]\, \Gamma \cup \{a[\pi \mapsto z] = b\} \,[\!]\, \ldots, \Phi_i \cup \{z = c\}, \ldots \rangle}$$

avec z une variable fraîche, a_π un pur $\mathcal{T}_i$-terme tel que $a_\pi \notin X$ et $\mathcal{T}_i, \Phi_i, \Delta^+ \models c = a_\pi$ et $E' = \{(z, x) \mid x \in \mathtt{vars}(c)\}$

La nouvelle équation $z = c$ (où c est un terme équivalent à a_π) permet de marquer les variables utiles de a_π dans E.

Sélection des égalités utiles (III)

❷ La règle **Deduct** devient **Deduct**^{util}

Deduct^{util}
$$\frac{\langle (V,E) \,[\!]\, \Delta \,[\!]\, \Gamma \,[\!]\, \Phi_1,\ldots,\Phi_n \rangle}{\langle (V,E) \,[\!]\, \Delta \cup \color{red}{x = y} \,[\!]\, \Gamma \,[\!]\, \Phi_1,\ldots,\Phi_n \rangle}$$

$$\mathcal{T}_i, \color{red}{\Phi_i^{util}}, \Delta^+ \models \color{red}{x = y} \text{ et } \Delta \not\models \color{red}{x = y}$$

❸ La règle **Contradict** devient **Contradict**^{util}

Contradict^{util}
$$\frac{\langle (V,E) \,[\!]\, \Delta \,[\!]\, \Gamma \,[\!]\, \Phi_1,\ldots,\Phi_n \rangle}{\color{red}{\bot}}$$

$\color{red}{\Phi_i^{util}} \wedge \Delta$ n'est par satisfiable

Sélection des égalités utiles (IV) : correction

Le théorème de correction du système complet reste vrai. Seule la preuve de correction du lemme d'irréductibilité doit être reprouvée.

Démonstration de l'irréductibilité pour les nouvelles règles.

Soit $\langle (V, E) \mathbin{[\!]} \Delta \mathbin{[\!]} \emptyset \mathbin{[\!]} \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle$ une configuration irréductible.

1. Il est immédiat que $\langle V^{util} \mathbin{[\!]} \Delta \mathbin{[\!]} \emptyset \mathbin{[\!]} \Phi_1^{util}, \ldots, \Phi_n^{util} \rangle$ est irréductible dans l'ancien système.

Sélection des égalités utiles (IV) : correction

Le théorème de correction du système complet reste vrai. Seule la preuve de correction du lemme d'irréductibilité doit être reprouvée.

Démonstration de l'irréductibilité pour les nouvelles règles.

Soit $\langle (V, E) \,[\!]\, \Delta \,[\!]\, \emptyset \,[\!]\, \Phi_1, \ldots, \Phi_n \rangle$ une configuration irréductible.

1. Il est immédiat que $\langle V^{util} \,[\!]\, \Delta \,[\!]\, \emptyset \,[\!]\, \Phi_1^{util}, \ldots, \Phi_n^{util} \rangle$ est irréductible dans l'ancien système.
2. Soient $z_1, \ldots, z_k$ les variables introduites, dans cet ordre, par la règle **Abstract**^{util}. La formule $\Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n$ est donc équivalente à une formule Ψ de la forme $z_1 = t_1 \wedge \cdots \wedge z_k = t_k$ et pour tout $j \geq i$, $z_j \notin \mathtt{vars}(t_i)$. Soit $y_1 = u_1 \wedge \cdots \wedge y_l = u_l$ la sous-séquence de Ψ telle que $u_i \in V \setminus V^{util}$. Donc $\Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n \wedge \Delta$ est équivalente à :

$$\Phi_1^{util} \wedge \cdots \wedge \Phi_n^{util} \wedge \Delta \wedge y_1 = u_1 \wedge \cdots \wedge y_l = u_l$$

On conclut en remarquant que $\Theta \wedge y = u$ est satisfiable si Θ est satisfiable et si y n'apparaît ni dans Θ ni dans u.

Comment déduire de nouvelles égalités ?

Dans la règle **Deduct**, il faut trouver une nouvelle paire de variables (x, y) telle que :

$$\mathcal{T}_i, \Delta, \Phi_i \models x = y$$

Une solution générique :

Pour chaque paire, utiliser la procédure de décision de $\mathcal{T}_i$ afin de déterminer si $\Delta \cup \Phi_i \cup \{x \neq y\}$ est $\mathcal{T}_i$-satisfiable.

Mais cette solution n'est pas très satisfaisante ; en fait, de nombreuses procédures de décision **convexes** peuvent être modifiées pour inférer ces égalités de manières plus efficace. Pour cela, elles maintiennent toutes une structure de données de type **union-find** sur les termes de manière à ce que $x = y$ peut être déduit en vérifiant que $\texttt{find}(x) = \texttt{find}(y)$.

Normalisation des états

Pour maintenir cette structure *union-find*, chaque procédure de décision fait appel à une **fonction de normalisation** (spécifique à chaque théorie). Une étape de normalisation est représentée par la relation :

$$(\Delta, \Phi_i) \Rrightarrow (\Delta, \Phi'_i)$$

Intuitivement, Φ_i peut être simplifié, éventuellement à l'aide de Δ, en un ensemble équivalent Φ'_i *plus* normalisé. Trois conditions sont nécessaires :

1. la relation $\Rrightarrow$ doit terminer

Normalisation des états

Pour maintenir cette structure *union-find*, chaque procédure de décision fait appel à une **fonction de normalisation** (spécifique à chaque théorie). Une étape de normalisation est représentée par la relation :

$$(\Delta, \Phi_i) \Rrightarrow (\Delta, \Phi'_i)$$

Intuitivement, Φ_i peut être simplifié, éventuellement à l'aide de Δ, en un ensemble équivalent Φ'_i *plus* normalisé. Trois conditions sont nécessaires :

1. la relation $\Rrightarrow$ doit terminer
2. L'equi-satisfiabilité de $\Phi_i \wedge \Delta$ et $\Phi'_i \wedge \Delta$

Normalisation des états

Pour maintenir cette structure *union-find*, chaque procédure de décision fait appel à une **fonction de normalisation** (spécifique à chaque théorie). Une étape de normalisation est représentée par la relation :

$$(\Delta, \Phi_i) \Rrightarrow (\Delta, \Phi'_i)$$

Intuitivement, Φ_i peut être simplifié, éventuellement à l'aide de Δ, en un ensemble équivalent Φ'_i *plus* normalisé. Trois conditions sont nécessaires :

1. la relation $\Rrightarrow$ doit terminer
2. L'equi-satisfiabilité de $\Phi_i \wedge \Delta$ et $\Phi'_i \wedge \Delta$
3. La complétude de $\Rrightarrow$: si $\mathcal{T}_i, \Phi_i, \Delta \models x = y$ et $\Delta \not\models x = y$ alors il existe Φ'_i tel que $(\Phi_i, \Delta) \Rrightarrow^* (\Phi'_i, \Delta)$ tel que $\{x = t, y = t\} \subseteq \Phi'_i$

Normalisation des états

Pour maintenir cette structure *union-find*, chaque procédure de décision fait appel à une **fonction de normalisation** (spécifique à chaque théorie).
Une étape de normalisation est représentée par la relation :

$$(\Delta, \Phi_i) \Rrightarrow (\Delta, \Phi'_i)$$

Intuitivement, Φ_i peut être simplifié, éventuellement à l'aide de Δ, en un ensemble équivalent Φ'_i *plus* normalisé. Trois conditions sont nécessaires :

1. la relation $\Rrightarrow$ doit terminer
2. L'equi-satisfiabilité de $\Phi_i \wedge \Delta$ et $\Phi'_i \wedge \Delta$
3. La complétude de $\Rrightarrow$: si $\mathcal{T}_i, \Phi_i, \Delta \models x = y$ et $\Delta \not\models x = y$ alors il existe Φ'_i tel que $(\Phi_i, \Delta) \Rrightarrow^* (\Phi'_i, \Delta)$ tel que $\{x = t, y = t\} \subseteq \Phi'_i$

Norm

$$\frac{\langle V \,[\!]\, \Delta \,[\!]\, \Gamma \,[\!]\, \ldots, \Phi_i, \ldots \rangle}{\langle V \,[\!]\, \Delta \,[\!]\, \Gamma \,[\!]\, \ldots, \Phi'_i, \ldots \rangle} \qquad (\Delta, \Phi) \Rrightarrow (\Delta, \Phi')$$

Règle de déduction efficace

On implante Δ comme une structure *union-find* et on note $\Delta(x)$ le représentant de la variable x.

Grâce à la normalisation des états, les égalités entre variables peuvent alors être détectées par une simple inspection dans la structure de donnée.

TDeduct

$$\frac{\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \parallel \ldots, \Phi_i \cup \{x = a, y = a\}, \ldots \rangle}{\langle V \parallel \Delta \cup \{x = y\} \parallel \Gamma \parallel \ldots, \Phi_i \cup \{x = a, y = a\}, \ldots \rangle}$$

$$\Delta(x) \neq \Delta(y)$$

Règle de déduction efficace : correction

Theorem (Correction)

Le système reste correct si **Deduct** *est remplacé par* **Norm** *et* **TDeduct***.*

Démonstration.

1. Les propriétés de terminaison et d'équi-satisfiabilité de $\Rrightarrow$ permettent clairement d'ajouter sans risque ces deux règles dans le système.

Règle de déduction efficace : correction

Theorem (Correction)

Le système reste correct si **Deduct** *est remplacé par* **Norm** *et* **TDeduct**.

Démonstration.

1. Les propriétés de terminaison et d'équi-satisfiabilité de $\Rrightarrow$ permettent clairement d'ajouter sans risque ces deux règles dans le système.
2. Maintenant, si $\mathcal{C}$ peut être réduite par **Deduct** pour produire l'égalité $x = y$ alors, en appliquant suffisamment la règle **Norm** on obtient une configuration $\mathcal{C}'$ telle que, d'après la propriété de complétude de $\Rrightarrow$, l'égalité $x = y$ peut également être déduite par **TDeduct** à partir de $\mathcal{C}'$. La règle **Deduct** peut donc être supprimée du système.

$\square$

Normalisation pour les théories libres

On étend la notation $\Delta(x)$ aux termes $\Delta(t)$.

Si $\mathcal{T}_i$ est une théorie libre, on supposera qu'après le mécanisme d'abstraction par variable les ensembles Φ_i sont de la forme $x = y$ ou $x = f(y_1, \ldots, y_k)$ où les y_i sont des variables. Alors, **Norm** = **Subst**, où

Subst
$$\frac{\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \parallel \ldots, \Phi_i \uplus \{x = t\}, \ldots \rangle}{\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \parallel \ldots, \Phi_i \cup \{x = \Delta(t)\}, \ldots \rangle} \qquad t \neq \Delta(t)$$

Theorem (Correction)

Les propriétés de terminaison et d'equi-satisfiabilité sont évidentes. La preuve de complétude est équivalent à la preuve de complétude de l'algorithme de **congruence closure**

Théories de **Shostak**

Une théorie de **Shostak** est une théorie **convexe** équipée d'un **canonizer** et d'un **solver**.

Definition (Canonizer $\sigma : T_\Sigma(X) \longrightarrow T_\Sigma(X)$)

Un canonizer est un algorithme qui satisfait le conditions suivantes :

Une théorie de **Shostak** est une théorie **convexe** équipée d'un **canonizer** et d'un **solver**.

Definition (Canonizer $\sigma : T_\Sigma(X) \longrightarrow T_\Sigma(X)$)

Un canonizer est un algorithme qui satisfait le conditions suivantes :

1. $\mathcal{T} \models u = v$ ssi $\sigma(u) = \sigma(v)$

Théories de **Shostak**

Une théorie de **Shostak** est une théorie **convexe** équipée d'un **canonizer** et d'un **solver**.

Definition (Canonizer $\sigma : T_\Sigma(X) \longrightarrow T_\Sigma(X)$)

Un canonizer est un algorithme qui satisfait le conditions suivantes :

1. $\mathcal{T} \models u = v$ ssi $\sigma(u) = \sigma(v)$
2. $\sigma(\sigma(u)) = \sigma(u)$

Une théorie de **Shostak** est une théorie **convexe** équipée d'un **canonizer** et d'un **solver**.

Definition (Canonizer $\sigma : T_\Sigma(X) \longrightarrow T_\Sigma(X)$)

Un canonizer est un algorithme qui satisfait le conditions suivantes :

1. $\mathcal{T} \models u = v$ ssi $\sigma(u) = \sigma(v)$
2. $\sigma(\sigma(u)) = \sigma(u)$
3. Chaque variable apparaissant dans $\sigma(u)$ apparaît également dans u

Théories de **Shostak**

Une théorie de **Shostak** est une théorie **convexe** équipée d'un **canonizer** et d'un **solver**.

Definition (Canonizer $\sigma : T_\Sigma(X) \longrightarrow T_\Sigma(X)$)

Un canonizer est un algorithme qui satisfait le conditions suivantes :

1. $\mathcal{T} \models u = v$ ssi $\sigma(u) = \sigma(v)$
2. $\sigma(\sigma(u)) = \sigma(u)$
3. Chaque variable apparaissant dans $\sigma(u)$ apparaît également dans u
4. Si $\sigma(u) = u$ alors $\sigma(v) = v$ pour chaque sous-terme v de u

Théories de **Shostak**

Une théorie de **Shostak** est une théorie **convexe** équipée d'un **canonizer** et d'un **solver**.

Definition (Canonizer $\sigma : T_\Sigma(X) \longrightarrow T_\Sigma(X)$)

Un canonizer est un algorithme qui satisfait le conditions suivantes :

1. $\mathcal{T} \models u = v$ ssi $\sigma(u) = \sigma(v)$
2. $\sigma(\sigma(u)) = \sigma(u)$
3. Chaque variable apparaissant dans $\sigma(u)$ apparaît également dans u
4. Si $\sigma(u) = u$ alors $\sigma(v) = v$ pour chaque sous-terme v de u

De tels canonizers existent pour de nombreuses théories utilisées dans la preuve de programmes.

Équations : solutions générales

Exemples :

$$x^2 + y^2 = 1 \quad ➠ \quad \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$$

$$\mathtt{car}(x) = \mathtt{cdr}(\mathtt{car}(y)) \quad ➠ \quad \begin{cases} x = \mathtt{cons}(t, u) \\ y = \mathtt{cons}((\mathtt{cons}(v, t), w)) \end{cases}$$

Une **solution générale** d'une équation $u(x_1, \dots, x_k) = v(x_1, \dots, x_k)$ est un ensemble d'équations

$x_1 = t_1, \dots, x_k = t_k$ où $y_1, \dots, y_m$ sont les variables des t_i

tel que $\mathcal{T} \models u = v \longleftrightarrow (\exists y_1 \dots y_m)\,(x_1 = t_1 \wedge \dots \wedge x_k = t_k)$

Definition (Solver)

Un **solver** pour une théorie $\mathcal{T}$ prend en entrée une équation $u = v$ (avec $x_1, \ldots, x_k$ ses variables), vérifie si l'équation est $\mathcal{T}$-satisfiable, et si c'est le cas, retourne sa **solution générale** :

$$x_1 = t_1, \ldots, x_k = t_k$$

telle que les variables x_i n'apparaissant pas dans les termes t_j.

Exemples de théories équipées de *solvers* :

1. $\mathbb{R}^+$ (pivot de Gauss)
2. La théorie des types algébriques
3. L'algèbre Booléenne
4. etc.

Normalisation pour les théories de **Shostak** (II)

Si $\mathcal{T}$ est une théorie de **Shostak**, on fait en sorte que Φ ait la forme

$$\{x_1 = t_1, \ldots, x_k = t_k\}$$

et que les variables $x_1, \ldots, x_k$ n'apparaissent pas dans les termes t_j.

Normalisation pour les théories de **Shostak** (II)

Si $\mathcal{T}$ est une théorie de **Shostak**, on fait en sorte que Φ ait la forme

$$\{x_1 = t_1, \ldots, x_k = t_k\}$$

et que les variables $x_1, \ldots, x_k$ n'apparaissent pas dans les termes t_j.

Exemple

1. Supposons que Φ soit de la forme

$$\{x_1 = u - v, x_2 = 2v - u, x_3 = 2u - v, x_4 = 2v\}$$

   et que $\Delta = \{x_1 = x_2\}$.

Normalisation pour les théories de **Shostak** (II)

Si $\mathcal{T}$ est une théorie de **Shostak**, on fait en sorte que Φ ait la forme

$$\{x_1 = t_1, \ldots, x_k = t_k\}$$

et que les variables $x_1, \ldots, x_k$ n'apparaissent pas dans les termes t_j.

Exemple

1. Supposons que Φ soit de la forme

$$\{x_1 = u - v, x_2 = 2v - u, x_3 = 2u - v, x_4 = 2v\}$$

   et que $\Delta = \{x_1 = x_2\}$.

2. Résolvons $x_1 = x_2$ pour u, v : la solution générale est $u = 3t, v = 2t$.

Normalisation pour les théories de **Shostak** (II)

Si $\mathcal{T}$ est une théorie de **Shostak**, on fait en sorte que Φ ait la forme

$$\{x_1 = t_1, \ldots, x_k = t_k\}$$

et que les variables $x_1, \ldots, x_k$ n'apparaissent pas dans les termes t_j.

Exemple

1. Supposons que Φ soit de la forme

   $$\{x_1 = u - v, x_2 = 2v - u, x_3 = 2u - v, x_4 = 2v\}$$

   et que $\Delta = \{x_1 = x_2\}$.

2. Résolvons $x_1 = x_2$ pour u, v : la solution générale est $u = 3t, v = 2t$.
3. On remplace alors u et v dans Φ et on *canonize* les parties droites.
4. On obtient $\Phi'_i = \{x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 4t, x_4 = 4t\}$.

Normalisation pour les théories de **Shostak** (II)

Si $\mathcal{T}$ est une théorie de **Shostak**, on fait en sorte que Φ ait la forme

$$\{x_1 = t_1, \ldots, x_k = t_k\}$$

et que les variables $x_1, \ldots, x_k$ n'apparaissent pas dans les termes t_j.

Exemple

1. Supposons que Φ soit de la forme

   $$\{x_1 = u - v, x_2 = 2v - u, x_3 = 2u - v, x_4 = 2v\}$$

   et que $\Delta = \{x_1 = x_2\}$.
2. Résolvons $x_1 = x_2$ pour u, v : la solution générale est $u = 3t, v = 2t$.
3. On remplace alors u et v dans Φ et on *canonize* les parties droites.
4. On obtient $\Phi'_i = \{x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 4t, x_4 = 4t\}$.
5. On peut alors appliquer la règle **TDeduct** qui infère que $x_3 = x_4$.

Normalisation pour les théories de **Shostak** (III)

Si $\mathcal{T}_i$ est une théorie de **Shostak** équipée d'un *canonizer* canon_i et d'un *solver* solve_i, alors

$$\textbf{Norm} = \textbf{Canon} \oplus \textbf{Solve}$$

est une fonction de normalisation *correcte*, où

Canon

$$\frac{\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \parallel \ldots, \Phi_i \uplus \{x = a\}, \ldots \rangle}{\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \parallel \ldots, \Phi_i \cup \{x = \mathsf{canon}_i(a)\}, \ldots \rangle}$$

$$\boxed{a \neq \mathsf{canon}_i(a)}$$

Solve$_i$

$$\frac{\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \parallel \ldots, \Phi_i \cup \{x = a, y = b\}, \ldots \rangle}{\langle V \parallel \Delta \parallel \Gamma \parallel \ldots, (\Phi_i \cup \{x = a, y = b\} \cup \mathsf{solve}(a = b))^2, \ldots \rangle}$$

$$\boxed{\Delta(x) = \Delta(y) \quad \text{et} \quad a \neq b \quad \text{et} \quad a = b \text{ est } \mathcal{T}_i\text{-satisfiable}}$$