Solutions des exercices

Exercice 1:

Il suffit de remarquer qu'on peut définir la relation $x \ll y$ en $\mathcal{A}_H$ par la formule $\exists z(y = f(x,z) \vee y = f(z,x))$, la décidabilité de $Th(\mathcal{A}_{H\ll})$ est donc une conséquence de la décidabilité de $Th(\mathcal{A}_H)$.

Exercice 2:

Le codage des mots ϕ, et les définitions des macros `epsilon` et $\mathtt{append}_w$ sont comme dans la preuve de la non-décidabilité de la théorie des termes modulo AC (Section 6.3 du poly). Pour les ensembles on met simplement

$$\begin{array}{rcl} \psi(\{(v_1,w_1),\ldots,(v_n,w_m)\}) & := & f_m(f_2(\phi(v_1),\phi(w_1)),\ldots,f_2(\phi(v_m),\phi(v_m))) \\ (x,y)\ \mathtt{in}\ z & := & f_2(x,y) \ll z \end{array}$$

Exercice 3:

- Soit ϕ une formule résolue, et X l'ensemble des variables x de ϕ pour lesquelles il n'y a *pas* d'équation $x = t$ dans ϕ. Par la définition d'une forme résolue, il y a un ordre $\sqsubset$ sur X tel que $x \sqsubset y$ quand $x < y \in \phi$. On défini les valeurs $\alpha(x)$ pour toutes variables $x \in X$ par induction sur l'ordre $\sqsubset$, puis on obtient immédiatement les valeurs pour toutes les variables de ϕ.
  Supposons que $\alpha(y)$ est définie pour toutes les variables $y \sqsubset x$. Soit
  $$t_1 < x \wedge \ldots \wedge t_m < x$$
  la conjonction de toutes les inéquations on ϕ avec x sur la côté droite. Par définition des formes résolues, on a $y \sqsubset x$ pour toutes les variables y qui paraissent dans les t_i. Donc, les évaluations par α des termes $t_1,\ldots,t_m$ sont déjà définies, et on pose par exemple
  $$\alpha(x) := f(\alpha(t_1), f(\alpha(t_2),\ldots,f(\alpha(t_n),a)\ldots))$$
- Le système de règles consiste des règles habituelles d'unification, plus

  (I1) $$\frac{t < a}{\perp}$$

  (I2) $$\frac{t < f(t_1,t_2)}{t = t_1 \vee t < t_1 \vee t = t_2 \vee t < t_2}$$

  (I3) $$\frac{t < x}{t < x \wedge y < x} \qquad y \in Var(t)$$

  (I4) $$\frac{x < x}{\perp}$$

  (I5) $$\frac{x < y \wedge y < z}{x < y \wedge y < z \wedge x < z}$$

  Il est entendu qu'une règle n'est appliquée que dans le cas où la formule résultante est différente de la formule du départ, par exemple (I3) n'est appliquée que dans le cas où $y < x$ n'est pas encore présente dans la formule.

Pour montrer la terminaison du système qui consiste des règles (I1)–(I5) et (U1)–(U6) on peut utiliser les fonctions de mesure suivantes :

– $\psi_1(\phi)$ = nombre de variables de ϕ qui ne sont *pas* éliminées ;
– $\psi_2(\phi)$ = nombre de paires $(x, y) \in (Var(\phi))^2$ telles que $x < y \notin \phi$,
– $\psi_3(\phi)$ = la somme des tailles des formules atomiques en ϕ

et le tableau suivant montre que la combinaison lexicographique de ces trois fonctions décroît strictement :

	$(U1)$	$(U2)$	$(U3)$	$(U4)$	$(U5)$	$(U6)$	$(I1)$	$(I2)$	$(I3)$	$(I4)$	$(I5)$
ψ_1	$=$	$=$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$<$	$\leq$	$\leq$	$=$	$\leq$	$=$
ψ_2	$=$	$=$	$=$	$=$	$=$		$=$	$\leq$	$<$	$\leq$	$<$
ψ_3	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$		$<$	$<$		$<$	

Exercice 4:

Le problème est, qu'avec un codage des mots comme dans l'exercice 2, la relation $\sqsubset$ n'est pas noethérienne puisqu'il y a maintenant aussi les termes infinis.

La modification du schéma de preuve est : il faut coder une macro $\texttt{finite}(x)$, telle que

– pour tous les mots $v \in \{a, b\}^*$ on a que $\mathcal{A} \models \texttt{finite}[\phi(v)]$
– il n'y a pas de séquence infinie de mots $v_1, v_2, \ldots \in \{a, b\}^*$ et séquence infinie $c_1, c_2, \ldots \in \mathcal{A}$ telle que

$$\mathcal{A} \models \texttt{finite}[c_1] \text{ et } \mathcal{A} \models \texttt{append}_{v_1}[c_2, c_1] \text{ et } \mathcal{A} \models \texttt{append}_{v_2}[c_3, c_2] \text{ et } \ldots$$

La définition de la formule $\texttt{solvable}_P$ est maintenant

$$\exists z, x((x, x) \texttt{ in } z \wedge \neg\texttt{epsilon}(x) \wedge \texttt{finite}(x) \wedge \texttt{construction}_P(z))$$

Pour la preuve de la non-décidabilité de $Th(\mathcal{A}^{\infty}_{H<})$: la définition du codage ϕ des mots, et des macros $\texttt{epsilon}$ et $\texttt{append}_w$ et comme dans l'exercice 2. La définition de la macro $\texttt{finite}$ est :

$$\begin{aligned} \texttt{finite}(x) \quad &:= \quad [\forall y(y < x \rightarrow (y = \epsilon \vee \exists z\ y = a(z) \vee \exists z\ y = b(z)))] \\ & \quad \wedge\ \epsilon < x \end{aligned}$$

Remarquez que $\epsilon < x$ tout seul n'est pas suffisant comme définition de $\texttt{finite}$ puisqu'il existe des arbres binaires infinis avec quelques feuilles étiquetées par ϵ.

Puis, le codage des ensembles de pairs de mots est

$$\begin{aligned} \psi(\{(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_m)\}) \quad &:= \quad f(\phi(v_1), \phi(w_1), f(\phi(v2), \phi(w_2), \ldots, \epsilon \ldots)) \\ (x, y) \texttt{ in } z \quad &:= \quad \exists r(f(x, y, r) < z) \end{aligned}$$