Master MPRI Paris 6
Dynamique et Algorithmique des Réseaux (Module 2.17)
Examen de modélisation Markovienne

Alain Jean-Marie

Novembre 2005

Exercice 1: une file décourageante

On considère le système suivant. Des clients arrivent dans une file d'attente selon un processus de Poisson de paramètre λ. Ils demandent un temps de service exponentiellement distribué de paramètre μ. Il y a un seul serveur, le service est FIFO, la capacité de la salle d'attente est infinie.

Avant d'entrer dans la file, un nouveau client compte le nombre de clients déjà présents. S'il trouve un nombre n de clients, le nouvel arrivant:

- rejoint effectivement la file d'attente avec probabilité $1/(n+1)$
- ne la rejoint pas et quitte le système instantanément, avec probabilité $1 - 1/(n+1)$.

a/ Expliquer pourquoi le processus du nombre de clients dans ce système, $\{N(t); t \in R\}$, est une chaîne de Markov en temps continu. Représenter le diagramme de transition de cette chaîne.
b/ Calculer la distribution de probabilité stationnaire du système. Sous quelle condition le système est-il stable?
c/ Expliquer pourquoi le processus d'arrivée des clients dans la file (*après* le choix d'y rentrer) est un processus de Poisson.
d/ (facultatif) Calculer le débit de ce processus.

Exercice 2: la file Processor Sharing

*Note : Cet exercice illustre le fait que certaines files à processor sharing ont la propriété d'*insensivité*: leur distribution ne dépend que de la moyenne du temps de service, et pas du détail de sa distribution.*

On considère une file à 1 serveur, dont la salle d'attente a une capacité infinie. Les clients y arrivent selon un processus de Poisson de débit λ. La discipline de service est *Processor Sharing* : quand n clients sont présents, chacun reçoit une fraction $1/n$ de la vitesse du processeur.

La durée de service suit une distribution dite « Erlang-2 ». Cette durée est constituée d'une première durée X_1, distribuée exponentiellement de paramètre μ. C'est la *phase* #1. Une fois cette phase terminée, le service continue avec une deuxième durée X_2, aussi distribuée exponentiellement de paramètre μ, et indépendante de la première. C'est la phase #2. La durée totale de service est donc $X_1 + X_2$, et sa moyenne est $2/\mu$.

Soit $N_i(t)$, $i = 1, 2$, le nombre de clients présents dans la file à l'instant t, dont le service est en phase $\#i$.

a/ Expliquer pourquoi le processus $\{(N_1(t), N_2(t); t \in R\}$ est une chaîne de Markov en temps continu. Représenter le diagramme de transition de cette chaîne.
b/ Écrire les équations d'équilibre de cette chaîne.

c/ Montrer, grâce à ces équations, que la distribution stationnaire de ce processus est (sous la condition $2\lambda < \mu$) :

$$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2) \;=\; \frac{1}{1-(2\lambda)/\mu} \prod_{i=1}^{2} \binom{n_1+n_2}{n_1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n_1+n_2} .$$

d/ Décrire le processus renversé, et ses taux de transition. En déduire une seconde preuve de cette distribution.

e/ (facultatif) Calculer la distribution du nombre de clients dans la file. Expliquer pourquoi c'est la même distribution que dans la file $M/M/1/PS$ dont la durée moyenne de service serait la même.