Master MPRI Paris 6
Dynamique et Algorithmique des Réseaux (Module 2.17)
Examen de modélisation Markovienne

Alain Jean-Marie

Novembre 2006

Les deux exercices sont liés, mais évidemment il est autorisé de se servir des réponses aux questions qu'on n'aura pas pu traiter.

Exercice 1: produit de chaînes de Markov

Soit $\{X_1(t); t \geq 0\}$, $\{X_2(t); t \geq 0\}$, ..., $\{X_K(t); t \geq 0\}$ une collection de K chaînes de Markov en temps continu, *indépendantes*. Pour la chaîne $\{X_k(t); t \geq 0\}$, on notera E_k son espace d'état (supposé au plus dénombrable), et $Q^{(k)}$ son générateur infinitésimal. Enfin, on notera : $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_K(t))$.

a/ Montrer que le processus $\{X(t); t \geq 0\}$, est une chaîne de Markov en temps continu dans l'espace $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_K$. Écrire son générateur infinitésimal.

b/ Supposons que chacune des chaînes $\{X_k(t); t \geq 0\}$, $1 \leq k \leq K$, soit réversible. Montrer que la chaîne $\{X(t); t \geq 0\}$ est réversible aussi.

Exercice 2: modélisation des réseaux à commutation de circuits

On considère le réseau de communication représenté dans la Figure 1. Il est constitué de trois nœuds (numérotés 1, 2 et 3) et deux liens: (1,2) et (2,3).

Le fonctionnement de ce réseau est comme suit. Il existe trois classes de communications: la classe C_1 utilise le lien (1,2); la classe C_2 utilise le lien (2,3) et la classe C_3 utilise *les deux* liens (1,2) et (2,3). Des demandes de communication de la classe i arrivent selon un processus de Poisson de débit λ_i communications par unité de temps. Quand une communication est acceptée, elle commence à utiliser, simultanément, tous les liens auxquels elle est associée. Une communication de la classe i dure un temps distribué exponentiellement, de moyenne $1/\mu_i$ unité de temps. Quand une communication se termine, elle libère simultanément tous les liens auxquels elle est associée. On utilisera la notation $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$.

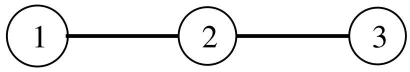

Figure 1: Réseau de l'exercice 2

a/ Soit $N_i(t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, le nombre de communications de la classe i présentes à l'instant t dans le réseau. Expliquer pourquoi le processus $\{(N_1(t), N_2(t), N_3(t)); t \geq 0\}$ est une chaîne de Markov en temps continu. Décrire son générateur infinitésimal.

b/ Écrire la distribution stationnaire de cette chaîne de Markov. Quelle est sa condition de stabilité?

c/ Soient $M_1(t)$ et $M_2(t)$ le nombre total de communications (toutes classes confondues) utilisant le lien (1,2) et le lien (2,3), respectivement. Écrire la distribution stationnaire de M_1.

d/ On suppose qu'il y a une contrainte sur la capacité des liens qui oblige que : $M_1(t) \leq G_1$ et $M_2(t) \leq G_2$ à tout instant t. Si une demande de communication qui viole ces contraintes se présente, elle est rejetée. Calculer la distribution du nouveau processus $\{(N_1(t), N_2(t), N_3(t)); t \geq 0\}$.

e/ (facultatif) Le processus $\{(M_1(t), M_2(t)); t \geq 0\}$ est-il une chaîne de Markov en temps continu?