Examen Partiel MPRI 2-17.

Tous les documents sont autorisés. L'utilisation d'une machine à calculer est possible. Durée: 1 heure

1 Algorithme de Karp

Soit $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ une matrice (max,plus) irréductible. On note G le graphe associé , avec un poids sur l'arc (i, j) qui vaut $A_{i,j}$. On sait d'après le cours que A admet une valeur propre unique, λ.

Le poids d' un chemin dans le graphe G est la somme des poids de ses arcs. Un chemin P de i à j est de poids maximal si le poids de tout chemin de i à j est inférieur (ou égal) au poids de P.

Q0 Montrer que tout sous-chemin d' un chemin de poids maximal est de poids maximal.

Q1 Donner la complexité asymptotique en fonction de n du calcul de λ utilisant la formule

$$\lambda = \max_{C \text{ circuit dans G}} \frac{\text{poids}(C)}{\text{longueur}(C)}.$$

Q2 Donner la complexité asymptotique en fonction de n du calcul de λ utilisant la formule (avec une vraie division)

$$\lambda = \max_{k=1}^{n} \max_{i=1}^{n} \frac{(A^k)_{i,i}}{k}.$$

Q3 On suppose dans un premier temps que $\lambda = 0$. Interpreter $P_{i,j}$ dans le graphe G avec $P_{i,j} = \max_{k=0}^{n-1} (A^k)_{i,j}$ (avec $A^0 = Id$). Montrer que pout tout i, j

$$\min_{k=0}^{n-1} \frac{(A^n)_{i,j} - (A^k)_{i,j}}{n-k} \leq 0.$$

Q4 On fixe i et on considère C un circuit de G de poids 0. Montrer qu'il existe un sommet ℓ de C tel que $(A^n)_{i,\ell} = P_{i,\ell}$. On déduire la valeur de

$$\max_{j=1}^{n} \min_{k=0}^{n-1} \frac{(A^n)_{i,j} - (A^k)_{i,j}}{n-k},$$

(on pourra utiliser la question Q0).

Q5 Par la suite on ne suppose plus que $\lambda = 0$. Montrer que

$$\max_{j=1}^{n} \min_{k=0}^{n-1} \frac{(A^n)_{i,j} - (A^k)_{i,j}}{n-k} = \lambda.$$

Q6 Calculer la complexité asymptotique en n d'un calcul de λ utilisant cette dernière formulation.

2 Gain maximal dans un graphe

Plusieurs problèmes de stratégies optimales dans les réseaux pair à pair peuvent être modélisées de la manière suivante.

On considère un système discret avec un espace d'état fini $E = \{1, \ldots K\}$. À chaque étape de son évolution, le système change d'état (passe de l'état i à l'état j) selon un graphe de transition G ($G_{i,j} = 1$ si on peut passer de i à j en une étape et $G_{i,j} = 0$ sinon, avec un gain $w_{i,j} \in \mathbb{R}$.

On note $X_i(n)$ le gain maximal possible en n étapes, en partant de i (on pose $X_i(0) = 0$ pour tout $i \in E$).

Q1 Donner une formule pour calculer $X_i(n)$.

Q2 Montrer que si le graphe de transition est fortement connexe, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{X_i(n)}{n}$ existe et ne dépend pas de i. Comment appeleriez-vous cette limite?

Q3 Si G et w sont symétriques ($G_{i,j} = G_{j,i}$ et $w_{i,j} = w_{j,i}$), calculer cette limite.