Examen du cours algorithmique des réseaux
Problème I

Laurent Viennot

14 février 2007

L'épreuve dure deux heures (pour les deux problèmes). Tout document est autorisé. Les deux parties doivent être traitées sur deux copies séparées portant chacune vos nom, prénom et email.

Construction centralisée de réseau logique efficace

Cette partie s'intéresse à la construction d'un « overlay » (ou réseau logique) avec faible densité (peu d'arêtes) et faible étirement des routes quand on connaît la matrice des distances entre nœuds. Il est inspiré des articles suivants :

Références

[1] Mikkel Thorup and Uri Zwick. *Compact routing schemes.* SPAA 2001.

[2] Aleksandrs Slivkins. *Distance Estimation and Object Location via Rings of Neighbors.* PODC 2005.

[3] Ittai Abraham, Cyril Gavoille, Andrew V. Goldberg, and Dahlia Malkhi. *Routing in networks with low doubling dimension.* ICDCS 2006.

1 Définitions

Métrique. On considère un ensemble V de n nœuds distribués dans l'internet et l'on suppose avoir accès au temps d'aller retour (RTT) $d(u, v)$ entre toute paire de nœuds u et v. On appelera $d(u, v)$ la *distance* entre u et v. On suppose que d est bien une métrique : pour tous u, v, w, $d(u, v) = d(v, u)$, $d(u, v) = 0$ ssi $u = v$ et $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Boule. On note $B_u(r)$ la boule de centre u et de rayon r constituée des nœuds à distance au plus r de u (soit $B_u(r) = \{v | d(u,v) \leq r\}$).

Réseau logique. Un réseau logique est défini par un graphe G de sommets V. On note $N(u)$ l'ensemble des voisins de u. Les nœuds sont étiquetés par des *labels* et des tables de routage permettent de décider à quel voisin envoyer un paquet pour une destination de label donné. (Le calcul de G, des labels et des tables de routage sera toujours centralisé avec une connaissance totale de la matrice de distances.) Pour être efficace, la taille des labels doit être de l'ordre $\log n$, le degré de chaque nœud doit être faible et la longueur de chaque route de l'ordre de la distance entre la source et la destination.

Facteur d'étirement. La longueur dans G d'une route de u à v passant par $u = u_1, \ldots, u_k = v$ est définie par $d_G(u,v) = \sum_{i=1}^{k-1} d(u_i, u_{i+1})$. Le *facteur d'étirement* de la route est $d_G(u,v)/d(u,v)$. Le facteur d'étirement du réseau logique est le facteur d'étirement maximal d'une route.

2 Routage avec facteur d'étirement 3 pour une métrique quelconque

Overlay : voisins proches. On vise ici un overlay de degré $O(\sqrt{n \log n})$. Pour commencer, on suppose que chaque nœud u est voisin des $\sqrt{n \log n}$ nœuds les plus proches de lui. Pour cela, on suppose qu'il existe un rayon r_u tel que $B_u(r_u)$ a cardinal $|B_u(r_u)| = \sqrt{n \log n}$ et que $B_u(r_u) \subseteq N(u)$.

Question 1. Donner un algorithme probabiliste trivial pour élire un ensemble L de nœuds vérifiant avec forte probabilité :

- la taille $|L|$ de L est en $O(\sqrt{n \log n})$,
- pour tout $u \in V$, $L \cap B_u(r_u) \neq \emptyset$ (L intersecte toutes les boules de voisins proches).

Pour justifier les bornes avec forte probabilité, on se contentera d'utiliser le lemme suivant.

Lemme. Si on lance m balles dans n urnes de manière aléatoire, équiprobable et indépendante avec $m = \Omega(n \log n)$, alors chaque urne contient avec forte probabilité au moins une balle et au plus $O(m/n)$ balles. (Pour la culture : $f(n) = \Omega(g(n))$ s'il existe c et N tels que pour $n > N$, $f(n) \geq cg(n)$. Forte probabilité signifie avec probabilité supérieure à $1 - 1/n^{\Omega(1)}$ (il existe $f(n) = \Omega(1)$ telle que la probabilité soir supérieure à $1 - 1/n^{f(n)}$). Ce lemme se déduit facilement des bornes de Chernoff par exemple.)

Overlay : voisins étalés. On considère le graphe G où le voisinage de tout nœud u est constitué de $B_u(r_u) \cup L$. (Les sommets de L sont donc connectés à tout nœud $u \in V$.) Le degré moyen de ce graphe est $O(\sqrt{n \log n})$.

Question 2. Proposer une manière de router dans ce graphe de sorte que le facteur d'étirement soit inférieur à 3.

Question 3. Proposer une construction randomisée d'overlay où tout nœud a degré $O(\sqrt{n \log n})$ (avec forte probabilité) en conservant une manière de router avec facteur d'étirement 3.

3 Métriques doublantes bornées : définitions

Métrique doublante bornée. Une métrique d est dite *α-doublante bornée* si toute boule de rayon r peut-être couverte par au plus 2^α boules de rayon $r/2$. On appellera cette propriété « la propriété de couverture de boule » formellement définie ci-dessous.

Propriété de couverture de boule. Pour toute boule $B_u(r)$ de centre u et de rayon r, il existe $u_1, \ldots, u_k$ avec $k \leq 2^\alpha$ tels que $B_u(r) \subseteq \cup_{i=1}^k B_{u_i}(r/2)$. α est appelée la *dimension doublante* de d.

Aspect ratio. L'aspect ratio Δ est le rapport entre la plus grande distance et la plus petite. Quitte à normaliser d, on supposera que la plus petite distance est 1, et que la plus grande est Δ.

r-net. Un *r-net* est un ensemble S de nœuds tel que pour tout $u \in V$, il existe $v \in S$ à distance au plus r (soit $d(u,v) \leq r$) et tel que deux nœuds $u, v \in S$ sont toujours à distance au moins r (soit $d(u,v) > r$).

4 Métriques doublantes bornées : Préliminaires

Question 4. Montrer qu'on a la relation suivante entre le nombre n de nœuds et l'aspect ratio Δ (log désigne le logarithme en base 2) :

$$1 + \lfloor \log \Delta \rfloor \geq \frac{1}{\alpha} \log n$$

Question 5. Proposer un algorithme glouton simple pour calculer un r-net.

Question 6. Montrer que toute boule de rayon $r' \geq r$ contient au plus $(4r'/r)^\alpha$ nœuds d'un r-net donné.

5 Routage avec facteur d'étirement $1 + \epsilon$ pour une métrique doublante bornée

Overlay. On se donne $\epsilon \in]0, 1/2[$. Pour chaque $j = 0, \ldots, \lceil \log \Delta \rceil$, on choisit un $\Delta/2^j$-net S_j. Pour tout $u \in V$, on appelle j-ième anneau de u l'ensemble $A_{uj} = B_u(r_j) \cap S_j$ avec $r_j = \frac{4\Delta}{\epsilon 2^j}$. $N(u) = \cup_{j=0}^{\lceil \log \Delta \rceil} A_{uj}$ constitue l'ensemble des voisins de u.

Question 7. Donner une borne sur le nombre d'arêtes de l'overlay ainsi défini.

Labels. Pour tout nœud t il existe f_{tj} dans S_j à distance au plus $\Delta/2^j$ de t. Le label de t sera constitué des identifiants des nœuds $f_{t0}, \ldots f_{t\lceil \log \Delta \rceil}$.

Question 8. Borner la taille des labels.

Question 9. Étant donné un nœud source u et un nœud destination t, montrer qu'on a $f_{tj} \in A_{uj}$ pour j assez petit. Montrer qu'on peut de plus obtenir $d(f_{tj}, t) < \epsilon d(u, t)$ pour un certain j.

Question 10. Donner une manière de router en $O(\log D / \log \frac{1}{\epsilon})$ sauts avec facteur d'étirement au plus $1 + 4\epsilon$.

Question 11. Comment faire en sorte que chaque r-net soit inclus dans le suivant : $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_{\lceil \log \Delta \rceil}$? En déduire une structure d'arbre dont les nœuds de V sont les feuilles. Énumérer avec précaution les sommets de cet arbre pour obtenir des labels de $\lceil \log n \rceil$ bits avec des tables de routage de $\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{O(\alpha)} \log n \log \Delta$ bits tout en conservant des routes de $O(\log D / \log \frac{1}{\epsilon})$ sauts avec facteur d'étirement au plus $1 + 4\epsilon$.

Correction

Construction centralisée de réseau logique efficace

2 Routage avec facteur d'étirement 3 pour une métrique quelconque

Question 1. Mettre dans L $c\sqrt{n \log n}$ nœuds choisis aléatoirement uniformément. Une boule $B_u(r_u)$ pour u donné peut-être considérée comme une urne parmi $n' = n/\sqrt{n \log n} = \sqrt{n/\log n}$ urnes dans lesquelles on jette $m = |L| = c\sqrt{n \log n}$ balles. Comme $m > 2cn' \log n'$, on peut appliquer le lemme.

Variante plus facile à implémenter : Mettre chaque nœud dans L avec probabilité $\frac{1}{n}\sqrt{n \log n}$. Par les bornes de Chernoff, $|L| = (1 + o(1))\sqrt{n \log n}$ et $|L \cap B_u(r_u)| \geq 1$ avec forte probabilité ($E[|L \cap B_u(r_u)|] = \log n$).

Question 2. Pour router de u à v, u envoie le message directement à v si $v \in B_u(r_u)$. Sinon, u envoie le message à un nœud $l \in L \cap B_u(r_u)$ qui l'envoie à v. L'inégalité triangulaire implique $d(u,l) + d(l,v) \leq 2d(u,l) + d(u,v)$. Comme $v \notin B_u(r_u)$, on a $d(u,l) \leq d(u,v)$, ce qui donne un facteur d'étirement d'au plus 3 dans l'équation précédente.

Question 3. Chaque nœud v choisit son propre ensemble L_v à partir d'une fonction pseudo-aléatoire initialisée avec une graine l_v qui fait partie du label de v. Ainsi tout nœud u peut calculer $B_u(r_u) \cap L_v$. Le routage de u à v est direct si $v \in B_u(r_u)$ et passe par $l \in B_u(r_u) \cap L_v$ sinon.

Pour borner le degré d'un nœud u, il faut compter combien d'ensembles L_v peuvent le contenir. Comme $u \in L_v$ avec probabilité $\sqrt{n \log n}/n$, u peut être considéré comme une urne parmi $n/\sqrt{n \log n}$ dans lesquelles on jette n balles. u a donc degré $O(\sqrt{n \log n})$ d'après le lemme.

Variante plus facile à implémenter : Chaque nœud v choisit son propre ensemble L_v à partir d'une fonction pseudo-aléatoire f_v qui renvoie un réel aléatoire entre 0 et 1. On pose $L_v = \{w | f_v(w) < \frac{1}{n}\sqrt{n \log n}\}$. (Par exemple, on associe à chaque nœud w une suite l_w de bits aléatoires et on calcule $f_v(w)$ par un générateur pseudo-aléatoire classique initialisé avec la graine $l_w l_v$ constituée des bits associés à w et v. Ainsi, tout nœud peut tester l'appartenance d'un nœud w à L_v connaissant l_w et l_v.) Le degré de tout nœud est alors $(3 + o(1))\sqrt{n \log n}$ avec forte probabilité.

4 Métriques doublantes bornées : Préliminaires

Question 4. V est couvert par la boule de rayon Δ centrée en un nœud quelconque. En appliquant k fois la propriété de couverture des boules, on obtient une couverture de V par au plus $2^{\alpha k}$ boules de rayon $\Delta/2^k$. En prenant $k = 1+\lfloor \log \Delta \rfloor$, ce rayon est strictement inférieur à 1 et chaque boule contient exactement un nœud d'où $n \leq 2^{\alpha(1+\lfloor \log \Delta \rfloor)}$.

Question 5. Construire une suite $V_0, \ldots, V_k$ d'ensemble de la manière suivante. Prendre $V_0 = V$. Choisir $u_0 \in V_0$ et poser $V_1 = V_0 - B_{u_0}(r)$. Itérer ainsi ensuite avec $u_1 \in V_1$,... jusqu'à $u_k \in V_k$ et $V_{k+1} = \emptyset$. Poser $S = \{u_0, \ldots, u_k\}$. Les nœuds de S sont distant d'au moins r par construction. Tout nœud $v \in V$ est à distance au plus r de u_i où V_i est le dernier ensemble qui contient v.

Question 6. Considérons une boule $B_u(r')$. En appliquant $2 + \lfloor \log r'/r \rfloor$ fois la propriété de couverture de boules, elle est couverte par au plus $2^{\alpha(2+\log r'/r)}$ boules de rayon strictement inférieur à $r/2$. Chacune de ces boules contenant au plus un nœud du r-net, on obtient bien la propriété demandée.

5 Routage avec facteur d'étirement $1 + \epsilon$ pour une métrique doublante bornée

Question 7. D'après la question 6, A_{uj} contient au plus $(16/\epsilon)^\alpha$ nœuds. Le nombre total d'arêtes est donc $O(n(16/\epsilon)^\alpha \log \Delta)$.

Question 8. $O(\log \Delta \log n)$.

Question 9. Pour $d(u,t) \leq \frac{2\Delta}{\epsilon 2^j}$, on a $d(u, f_{tj}) \leq d(u,t)+d(t, f_{tj}) \leq \frac{2\Delta}{\epsilon 2^j} + \frac{2\Delta}{\epsilon 2^j} \leq r_j$ (en utilisant $\epsilon \leq 2$), et donc $f_{tj} \in A_{uj}$. (Ceci est au moins vérifié pour $j = 0$.) Pour $\frac{\Delta}{\epsilon 2^j} < d(u,t) \leq \frac{2\Delta}{\epsilon 2^j}$ (le plus grand des j vérifiant l'inégalité précédente), on obtient $d(u,t) > d(f_{tj}, t)/\epsilon$.

Question 10. Pour tout v, on note $j(v,t)$ la valeur de j telle que $\frac{\Delta}{\epsilon 2^{j(v,t)}} < d(v,t) \leq \frac{2\Delta}{\epsilon 2^{j(v,t)}}$. On route de $u = u_0$ vers t en passant par $u_1 = f_{tj(u,t)}, u_2 = f_{tj(u_1,t)}, \ldots$ jusqu'à tomber sur u_k voisin direct de $t = u_{k+1}$. Les $j(u_i, t)$ croissent avec i puisque la distance est inférieure d'un facteur au moins $1/\epsilon > 2$ à chaque fois. Comme $d(u_i, t) < \epsilon^i d(u,t)$, le routage se fait en $O(\log_{1/\epsilon} \Delta)$ sauts. En combinant $d(u_i, t) \leq \epsilon^i d(u,t)$ et $d(u_i, u_{i+1}) \leq d(u_i, t) + d(u_{i+1}, t) \leq (1 + \epsilon)d(u_i, t)$, la longueur de la route est bornée par $\sum_{i=0}^{k} d(u_i, u_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{k}(1 + \epsilon)\epsilon^i d(u,t) \leq d(u,t)\left(1 + \frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\right) \leq d(u,t)(1 + 4\epsilon)$ (on a supposé $\epsilon < 1/2$).

Question 11. Obtenir S_{j+1} en opérant l'algorithme glouton à partir S_j. Chaque nœud de $x \in S_{j+1}$ est ainsi couvert par un nœud $p_j(x) \in S_j$ à distance au plus $\Delta/2^j$ (on pose $p_j(x) = x$ si $x \in S_j$). On obtient ainsi un arbre de feuilles V où une copie du nœud x apparaît à tous les niveaux j tels que $x \in S_j$. Comme $d(x, p_j(x)) \leq \Delta/2^j$ pour tous x, j, le sous-arbre de racine un nœud x de niveau j est inclus dans la boule de centre x et de rayon $\Delta/2^{j-1}$. Numéroter les nœuds selon un parcours DFS de l'arbre : x est numéroté dès que la première copie de x est rencontrée. On note $D(x)$ son numéro (codé sur $\lceil \log n \rceil$ bits), et on l'utilise comme label pour x. Pour un nœud x apparaissant au niveau j de l'arbre, on peut alors coder l'ensemble $T_j(x)$ des nœuds apparaissant dans son sous-arbre par $2\lceil \log n \rceil$ bits (il s'agit d'un intervalle dans l'ordre d'énumération). Ainsi, il suffit à u de connaître le codage de $L_j(v)$ pour tout voisin $v \in A_{uj}$ pour pouvoir, connaissant le label $D(t)$ d'une destination t, trouver $f_{tj} \in A_{uj}$ tel que $d(f_{tj}, t) \leq \Delta/2^{j-1}$. En utilisant plutôt $A'_{uj} = B_u(r_j) \cap S_{j+1}$ on peut trouver $f_{tj} \in A'_{uj}$ tel que $d(f_{tj}, t) \leq \Delta/2^j$ (le degré est alors multiplié par un facteur 2^α) et reprendre le schéma de routage précédent avec des labels de $\lceil \log n \rceil$ bits cette fois.