TD01 - Aux grands mots les grands moyens

Exercice 1. *Échauffement*

1. Trouver un automate fini reconnaissant les entiers écrits en base 2 qui sont congrus à 1 modulo 3.

2. Donner un automate fini qui reconnaisse l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont la $i^{ième}$ lettre en partant de la fin est un a.

Exercice 2. *Rationnel ?*

✎ Parmi les langages suivants lesquels sont rationnels ? Justifiez vos réponses :

1. $\{a^{2n},\ n \geq 0\}$.
2. $\{a^m b^n a^{m+n},\ m \geq 0 \text{ et } n \geq 0\}$.
3. $\{a^p,\ p \text{ premier}\}$.
4. L'ensemble des mots qui n'ont pas trois a consécutifs.
5. L'ensemble des mots qui ont un nombre égal de a et de b.
6. L'ensemble des mots qui sont des palindromes sur $\Sigma = \{a, b\}$.
7. $\{u\overline{u}v \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$ où $\overline{u}$ est le miroir de u, $\overline{abb} = bba$.
8. $\{uv\overline{u} \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$.
9. $\{a^i b^j, \text{pgcd}(i, j) = 1\}$.
10. $\{a^i b^j, i \geq j\}$.

Exercice 3. *La puissance du commutateur*

✎ Montrer que si deux mots u et v commutent ($uv = vu$) ils sont puissance d'un même mot (il existe $w \in \Sigma^*$ et $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $u = w^k$ et $v = w^{k'}$).

Exercice 4. *Elu par cette crapule, Esope reste et se repose.*

On appelle image miroir d'un mot u sur un alphabet Σ (ou simplement miroir de u) le mot $\bar{u}$ ainsi défini :
– si $u = \epsilon$ alors $\overline{u} = \epsilon$,
– si $u = a_1 a_2 \ldots n_n$ alors $\overline{u} = a_n a_{n-1} \ldots a_1$.
Soit L l'ensemble des mots u sur Σ tels que $u = \overline{u}$ (appelés *palindromes*). On suppose que Σ contient au moins deux lettres (parce que sinon c'est pas très drôle).

1. Soient $u, u_1, u_2 \ldots, u_n$ des mots sur Σ tels que u soit distinct de tous les u_i. Démontrer qu'il existe un mot v sur Σ tel que $uv \in L$ et $u_i v \notin L$ pour tout i. (On pourra considérer $v = a^m b a^m \overline{u}$ où a et b sont des lettres de Σ et m est un entier assez grand)

2. Existe-t-il toujours un tel mot v si la famille (u_i) est infinie ?

Exercice 5. *Babord et tribord sont dans un bateau...*

On appelle bord d'un mot u sur un alphabet Σ tout mot v non vide qui est à la fois préfixe propre et suffixe propre de u.

✎ Prouver que si Σ est un alphabet contenant au moins deux lettres, pour tout mot u non vide sur Σ, il existe un mot v sur Σ tel que uv n'a pas de bord.