# TD05 – The Very Best of the Partiel 2004

**Exercice 1.** *Prédiction des mots univers*

Dans tout cet exercice, on considèrera l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

**Définition 1** (automate de prédiction). *Un* automate de prédiction $\mathcal{A}$ *(sur l'alphabet $\Sigma$) est un quintuplet $(Q, q_0, Q_a, Q_b, \delta)$ où*
- *$Q$ est un ensemble fini (les états de $\mathcal{A}$)*
- *$q_0 \in Q$ est l'état initial*
- *$Q_a \subseteq Q$*
- *$Q_b \subseteq Q$*
- *$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est la fonction de transition de $A$*

(on peut voir ces automates comme des automates finis déterministes ayant deux ensembles d'états terminaux)

**Définition 2** (mots infinis). *Un* mot infini *$w$ sur $\Sigma$ est une suite $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\Sigma$.*

**Définition 3** (parcours d'un mot). *Soit $\mathcal{A}$ un automate de prédiction et $w$ un mot infini sur $\Sigma$. Le* parcours de $w$ sur $\mathcal{A}$ *est défini comme étant la suite $(q(w)_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $Q$ avec*

$$\begin{aligned} & q(w)_0 = q_0 \\ \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad & q(w)_{n+1} = \delta(q(w)_n, w_n) \end{aligned}$$

**Définition 4** (prédiction). *Soit $w$ un mot infini sur $\Sigma$ et $\mathcal{A}$ un automate de prédiction. On dira que l'automate $\mathcal{A}$* prédit *le mot infini $w$ si le parcours de $w$ sur $\mathcal{A}$ passe un nombre infini de fois par des états de $Q_a \cup Q_b$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} q(w)_n \in Q_a \quad &\Rightarrow \quad w_n = a \quad \textit{et} \\ q(w)_n \in Q_b \quad &\Rightarrow \quad w_n = b \end{aligned}$$

*De plus, un mot infini sur $\Sigma$ est dit* prédictible *s'il existe un automate de prédiction $\mathcal{A}$ qui prédise $w$.*

Intuitivement, la prédiction d'un mot $w$ par l'automate $\mathcal{A}$ signifie que lorsque l'on atteint un état de $Q_a$ (en lisant un préfixe de $w$) la prochaine lettre de $w$ que l'on va lire sera un $a$ (et symétriquement pour $b$).

**Définition 5** (mots univers). *Un mot infini $w$ sur $\Sigma$ est dit* univers *si tout mot fini $x$ de $\Sigma^*$ est un facteur de $w$.*

On se propose de montrer le résultat suivant

**Proposition 1.** *Un mot infini $w$ est* prédictible *si et seulement si il n'est pas* univers.

**1.** Montrer que dans un mot univers $w$, tout mot fini $x \in \Sigma^*$ apparaît un nombre infini de fois comme facteur de $w$ et que tous ses suffixes (les suites $(w_i)_{i\geq k}$) sont également univers.

**2.** Montrer que tout mot infini qui n'est pas univers est prédictible (on pourra considérer un plus court mot de $\Sigma^*$ qui n'apparaît qu'un nombre fini de fois dans $w$).

On suppose maintenant que l'on a un mot $w$ qui est prédit par un automate $\mathcal{A}$. On veut montrer que $w$ n'est pas univers.

**3.** Montrer que l'on peut se ramener (quitte à considérer un suffixe de $w$ et un sous-automate de $\mathcal{A}$) à une situation où le parcours de $w$ sur $\mathcal{A}$ passe une infinité de fois par tous les états de $\mathcal{A}$.

On suppose que l'on est dans la situation décrite dans la question précédente.

**4.** Montrer qu'il existe un entier $d$ tel que pour tout état $q$ de $\mathcal{A}$, il existe un mot $x_q \in \Sigma^*$ de longueur $d$ qui n'est jamais lu dans le parcours de $w$ sur $\mathcal{A}$ à partir de $q$.
C'est-à-dire que pour tout $i$, si $q(w)_i = q$ alors le mot $w_i w_{i+1} \dots w_{i+d-1}$ est différent de $x_q$.

**5.** En déduire qu'il existe un entier $K$ tel que pour tout $n \geq 1$, le nombre de facteurs distincts de longueur $nd$ dans $w$ est inférieur à $K(2^d - 1)^n$.

**6.** Conclure.

**Exercice 2.** *L'abominable Lex L. (contre Superman)*

Soit $L$ un langage rationnel sur un alphabet fini $\Sigma$ quelconque. On munit $\Sigma$ d'un ordre total et l'on considère l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}}$ sur $\Sigma^*$. On définit le langage

$$L_{\text{lex}} = \{w \in L \quad | \quad \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{\text{lex}} x\}$$

(Pour chaque longueur de mots dans $L$, on ne garde que le plus petit pour l'ordre lexicographique.) Montrer que $L_{\text{lex}}$ est rationnel.