MPRI 2ième année
Examen partiel du cours C2-14-1
Mercredi 22 novembre 2006

Reconstruction

Le but général de cette partie est de montrer les liens entre différents algorithmes de reconstruction et de souligner la connexion qui existe entre ces algorithmes et les singularités de la fonction qui mesure la distance d'un point de l'espace à l'échantillon. Pour simplifier, on se place en dimension 2 et on envisage le problème de la reconstruction d'une courbe lisse fermée à partir d'un échantillon de points.

Dans tout ce qui suit $\mathcal{C}$ est donc une courbe lisse fermée et $\mathcal{P}$ un échantillon de points sur $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{O}$ le domaine borné par $\mathcal{C}$. Pour tout point x de $\mathcal{C}$, on note $\mathrm{lfs}(x)$ la distance de x à l'axe médian de $\mathcal{C}$.
Un échantillon $\mathcal{P}$ de points de $\mathcal{C}$ est un ϵ-échantillon si tout point x de $\mathcal{C}$ est à une distance au plus $\epsilon \mathrm{lfs}(x)$ d'un point de $\mathcal{P}$. On suppose ici que $\mathcal{P}$ est un ϵ-échantillon de $\mathcal{C}$ pour un ϵ suffisamment petit. On suppose aussi que $\mathcal{P}$ est en position générale, c'est à dire ne contient aucun sous-ensemble de 3 points alignés ou de 4 points cocycliques.

On rappelle que la méthode du Delaunay restreint, exposée en cours, consiste à construire la triangulation de Delaunay, $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$, des points de $\mathcal{P}$, puis la triangulation de Delaunay restreinte, $\mathrm{Del}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$. La triangulation de Delaunay restreinte $\mathrm{Del}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$ est constituée par les arêtes de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$ dont l'arête de Voronoï duale intersecte $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{P}$ est un ϵ-échantillon de $\mathcal{C}$ pour ϵ suffisamment petit, $\mathrm{Del}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$ est homéomorphe à $\mathcal{C}$.

Exercice 1. **Reconstruction par le Crust.** La méthode du crust consiste à construire le diagramme de Voronoï, $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$, des points de $\mathcal{P}$, puis la triangulation de Delaunay $\mathrm{Del}(\mathcal{P} \cup \mathcal{V})$ de l'ensemble $\mathcal{P} \cup \mathcal{V}$ ou $\mathcal{V}$ est l'ensemble des sommets du diagramme $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$. Le crust est constitué par les arêtes de la triangulation $\mathrm{Del}(\mathcal{P} \cup \mathcal{V})$ dont les deux sommets sont des points de $\mathcal{P}$.

(a) Montrer que toute boule de Delaunay circonscrite à un triangle pqs de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$ contient un point de l'axe médian de $\mathcal{C}$ et a donc un rayon $r \geq \frac{\mathrm{lfs}(p)}{2}$. En déduire que tout sommet de Voronoï de la cellule de p est à distance $\geq \frac{\mathrm{lfs}(p)}{2}$ de $\mathcal{P}$.

(b) Montrer que toute arête de la triangulation restreinte $\mathrm{Del}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$ est une arête du crust.

(c) Montrer que toute arête du crust est une arête de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$.

(d) Les arêtes du crust ne forment pas en général une variété. (i. e. un esemble d'arêtes tel que tout sommet soit incident à exactement deux arêtes). Proposer une stratégie raisonable pour extraire du crust une variété approximant la courbe $\mathcal{C}$, sans avoir recours à un oracle capable de tester si une arête appartient ou non à $\mathrm{Del}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$.

Solution.

(a) Soit B la boule de Delaunay circonscrite au triangle pqs de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$. Si $B \cap \mathcal{C}$ est formé de plusieurs composantes connexes, B contient nécessairement un point de l´axe médian (lemme 5.2 du cours). Sinon $\mathcal{C}$ forme à l'intérieur de B un arc passant par p, q et s et tangent à B en au moins un des 3 points. Le rayon de courbure de $\mathcal{C}$ au point de tangence est alors nécessairement supérieur au rayon de B et B contient un point de l'axe médian.

(b) Soit $e = pq$ une arête de la triangulation restreinte $\mathrm{Del}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$. Son arête duale e^* joint deux sommets de $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ dont l'un, soit v_i, est interne à $\mathcal{O}$ tandis que l'autre v_e est externe. Soient $B(v_i)$ et $B(v_e)$ les boules de Delaunay centrées respectivement en v_i et v_e. (Si e est une arête de l'enveloppe convexe, le sommet v_e est à l'infini et la boule de Delaunay est un demi-plan.) L'union $B(v_i) \cup B(v_e)$ contient toute boule B du faisceau déterminé par $B(v_i)$ et $B(v_e)$ et centrée entre v_e et v_i. Parmi ces boules se trouve au moins une boule de Delaunay $B(c)$ centré en un point c, intersection de e^* et $\mathcal{C}$. Cette boule est vide de points de $\mathcal{P}$, et a donc un rayon inférieur à $\epsilon \mathrm{lfs}(c) \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \mathrm{lfs}(p)$. D'après la question précédente, pour ϵ assez petit, elle ne contient donc pas non plus de sommets de $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$. Ceci prouve que $e = pq$ est un arête de $\mathrm{Del}(\mathcal{P} \cup \mathcal{V})$.

(c) Pour arête pq de $\mathrm{Del}(\mathcal{P} \cup \mathcal{V})$, il existe une boule de Delaunay passant par p et q et ne contenant aucun point de $\mathcal{P} \cup \mathcal{V}$. Cette boule ne contient aucun point de $\mathcal{P}$ et témoigne donc aussi du fait que pq est une arête de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$.

(d) On sélectionne tout d'abord de la plus petite arête du crust qui est vraisemblablement une arête du Delaunay restreint. On sélectionne ensuite de proche en proche les arêtes suivantes en se basant sur l'angle formé par deux arêtes successives. Soit pq la dernière arête du crust sélectionée et q son extrémité libre : la prochaine arête sélectionnée sera l'arête qr du crust telle que l'angle $\widehat{pqr}$ est le plus voisin possible de π.

□

Exercice 2. **Reconstruction par le *Power Crust*.** Soient $\mathcal{R}$ l'ensemble des sommets d'une boite englobante de $\mathcal{P}$. Les sommets de $\mathcal{R}$ sont supposés suffisamment éloignés de $\mathcal{P}$ pour que tous les sommets de l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$ soient des sommets de $\mathcal{R}$ mais aussi pour que tout triangle de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$ soit un triangle $\mathrm{Del}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R})$. Voir figure 1.

(a) On considère l'ensemble $\mathcal{S}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R})$ des sphères circonscrites aux triangles de $\mathrm{Del}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R})$ (sphères de Delaunay) et le diagramme de puissance, $\Pi(\mathcal{S}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R}))$, de ces sphères. Montrer que tout triangle de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$ est une cellule du diagramme de puissance $\Pi(\mathcal{S}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R}))$.

(b) L´algorithme du *power crust* classe les sommets de Voronoï du diagramme $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ en deux sous ensembles : l'ensemble $\mathcal{V}_i$ des sommets internes qui

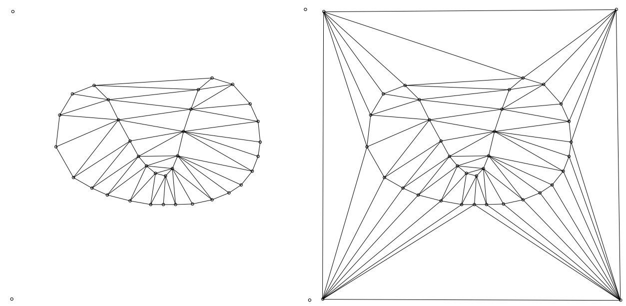

FIG. 1 – Triangulations de Delaunay $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$ and $\mathrm{Del}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R})$.

sont inclus dans $\mathcal{O}$ et l'ensemble $\mathcal{V}_e$ des sommets externes, i. e. non inclus dans $\mathcal{O}$. De même, on appelle *internes* les cellules du diagramme $\Pi(\mathcal{S}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R}))$ associées aux sphères circonscrites à un triangle de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$ dont le dual est un sommet de Voronoï interne de $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$. Les autres cellules sont appelées *externes*. Le power crust est le bord de l'union des cellules internes de $\Pi(\mathcal{S}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R}))$.

Montrez que le power crust coïncide avec la triangulation Delaunay restreinte $\mathrm{Del}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$.

(c) Finalement tout le problème de cette méthode réside dans la classification des sommets de $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ en deux sous-ensembles $\mathcal{V}_i$ et $\mathcal{V}_e$. Le résultat suivant est souvent utilisé pour classifier les sommets de Voronoï. Soit p un point de $\mathcal{P}$, pq une arête de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$, t et t' les deux triangles de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$ incidents à pq, et v et v' les centres des sphères circonscrites à t et t' respectivement. Montrer que l'angle $\widehat{vpv'}$ est un $O(\epsilon)$ si v et v' sont des sommets de Voronoï de la même classe (interne ou externe) $\pi - O(\epsilon)$ s'ils sont de classes différentes.

Solution.

(a) Soit $t = abc$ un triangle de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$ et $B(t)$ sa boule circonscrite. La droite support de ab est l'axe radical de $B(t)$ et $B(t')$ où t' est le triangle adjacent à t le long de ab. Le triangle t est situé dans le demi-espace des points qui ont une puissance plus petite par rapport à $B(t)$ que par rapport à $B(t')$. Le même raisonnement pour bc et ca montre que le triangle t est l'intersection des 3 demi-espaces qui contiennent la cellule de $B(t)$ dans le diagramme $\Pi(\mathcal{S}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R}))$ et donc contient cette cellule. D'autre part chacun des sommets a, b et c a une puissance nulle par rapport à $B(t)$ et une puissance positive ou nulle par rapport à toute autre boule circonscrites aux triangles de $\mathrm{Del}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R})$. Chacun des sommets a, b et c appartient donc à la cellule de $B(t)$. Cette dernière étant convexe, elle inclut le triangle t.

(b) Toute arête du power crust appartient à deux triangles t et t' de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$ dont les centre v et v' sont l'un à l'intérieur de $\mathcal{O}$ et l'autre à l'extérieur. L'arête duale vv' intersecte donc nécessairement $\mathcal{C}$.

(c) On montre que pour tout sommet v de la cellule de Voronoï $V(p)$ du point p dans le diagramme $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$, l'angle entre la droite pv et la normale à $\mathcal{C}$ en p est un $O(\epsilon)$. (Il s'agit ici de l'angle entre deux droites, i. e. du plus petit des deux angles formés par les deux droites).

Soit p un point de $\mathcal{P}$, v un sommet de la cellule de $V(p)$. Soient m et m' les deux points situés à distance $\mathrm{lfs}(p)$ de p sur la normale à $\mathcal{C}$ en $\mathcal{P}$ et soient B_m et $B_{m'}$ les boules de rayon $\mathrm{lfs}(p)$ centrées respectivement en m et m'. Soit B_v la boule de Delaunay centrée en v. On suppose sans perte de généralité que v et m sont du même côté de $\mathcal{C}$. Voir Figure 2. Le segment vm' intersecte donc nécessairement la courbe $\mathcal{C}$, soit q le point d'intersection le plus proche de p. Les boules B_v et $B_{m'}$ ne contenant pas de points de $\mathcal{P}$, le point de l´échantillon le plus proche de q est p, et $\|pq\| \leq \epsilon \mathrm{lfs}(q) \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\mathrm{lfs}(p)$. L'angle qui nous intéresse est l'angle $\phi = \widehat{vpm} = \alpha + \beta$, ou $\alpha = \widehat{vm'p}$ et $\beta = \widehat{m'vp}$. Puisque $\|pq\| \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\mathrm{lfs}(p)$, $\|pv\| \leq \frac{1}{2}\mathrm{lfs}(p)$ et $\|pm'\| = \mathrm{lfs}(p)$, $\sin(\alpha) \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ et $\sin(\beta) \leq \frac{2\epsilon}{1-\epsilon}$ et $\phi = \widehat{vpm} \leq \arcsin\frac{\epsilon}{1-\epsilon} + \arcsin\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}$.

En conclusion, pour tout sommet v de $V(p)$, la droite pv et la normale à $\mathcal{C}$ en p forment donc un angle inférieur à $\phi(\epsilon) = \arcsin\frac{\epsilon}{1-\epsilon} + \arcsin\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}$. Soit v et v' deux sommets de $V(p)$. Si v et v' sont tous deux internes ou tous deux externes $\widehat{vpv'}$ est inférieur à $2\phi(\epsilon)$. Dans le cas contraire, $\widehat{vpv'}$ est supérieur à $\pi - 2\phi(\epsilon)$.

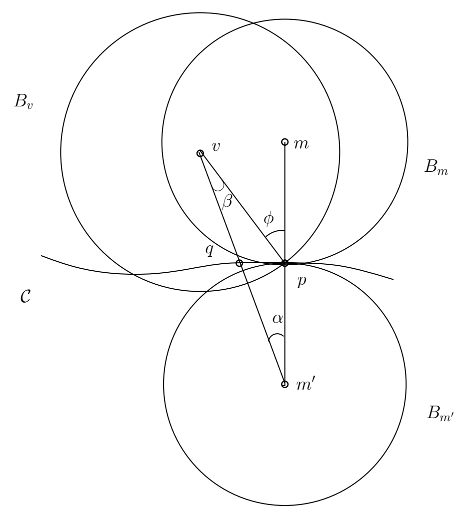

FIG. 2 – Angle entre le vecteur $p - v$ et la normale.

□

Exercice 3. Reconstruction par la méthode du flux.
La méthode s'intéresse à la fonction distance $d(x)$ qui mesure la distance de x à $\mathcal{P}$:

$$d(x) = \min_{p \in \mathcal{P}} \|x - p\|$$

(a) Montrer que la fonction $d(x)$ est différentiable partout sauf sur les arêtes et aux sommets du diagramme de Voronoï, et calculer le gradient de $d(x)$.

(b) Étudier le sens de variation de $d(x)$ le long des arêtes de $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$.

(c) Montrer que les maxima de la fonction distance sont les sommets du diagramme de Voronoï qui sont inclus dans leur triangle dual.

(d) La fonction $d(x)$ n´est pas différentiable. Néanmoins on peut définir un champ de gradient généralisé $\nabla(x)$ qui coïncide avec le gradient de $d(x)$ partout où il est défini et dont les lignes intégrales sont les courbes de plus grande croissance de la distance. Pour définir le champ $\nabla(x)$ on considère la boule maximale $B(x, r(x))$ centrée en x dont l'intérieur ne contient pas de point de $\mathcal{P}$. Soit $\Gamma(x)$ l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ situés sur la sphère qui borne $B(x, r(x))$. Les points de $\mathcal{P}$ étant supposés en position générale, $\Gamma(x)$ est toujours de cardinal au plus égal à 3. Soit $\gamma(x)$ le centre de la plus petite boule contenant $\Gamma(x)$.

$$\nabla(x) = \frac{x - \gamma(x)}{r(x)}.$$

On appelle *critiques* les points où le champ $\nabla(x)$ s'annule. Montrer que x est un point critique si et seulement si x est inclus dans l'enveloppe convexe $\mathrm{conv}(\Gamma(x))$ des points $\Gamma(x)$. Localiser les points critiques dans le diagramme de Voronoï $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ et la triangulation de Delaunay $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$ et montrer que ces points critiques sont les minima, les points selle et les maxima de la fonction distance $d(x)$.

(e) A partir du gradient $\nabla(x)$, on définit un flux $\phi(t, x)$. Le flux $\phi(x, t)$ est une application de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ qui décrit des trajectoires suivant les lignes de plus grande pente de la fonction distance :

$$\phi(x, t) = x + \int_{u=0}^{u=t} \nabla(\phi(x, u))du.$$

$\phi(x, t)$ est la position atteinte au temps t par un point partant de x. Un point x tel que $\phi(x, t) = x$ pour tout t est un point fixe. Les points fixes sont les points critiques. L'ensemble $\{\phi(x, t), t \in \mathbb{R}\}$ est l'orbite du point x. On peut montrer que la distance à $\mathcal{P}$ est croissante le long d'une orbite et donc que le flux ϕ n'a pas d'orbite fermée. Lorsque $t \to \infty$, $\phi(x, t)$ part à l'infini ou se termine sur un point fixe. Pour tout point fixe y, on appelle *variété stable* de y et on note $\mathrm{St}(y)$ l'ensemble des points x dont l'orbite se termine en y. Décrire les variétés stables des minima, des points selles. et des maxima de la fonction distance.

(f) Décrire un algorithme pour calculer les variétés stables des maxima.

(g) L'algorithme de reconstruction par flux approxime $\mathcal{O}$ par l'union des variétés stables des maxima internes à $\mathcal{O}$. Montrez que l'objet reconstruit par cette méthode est exactement le même que l'objet reconstruit par la méthode du power crust ou du Delaunay restreint.

Solution.

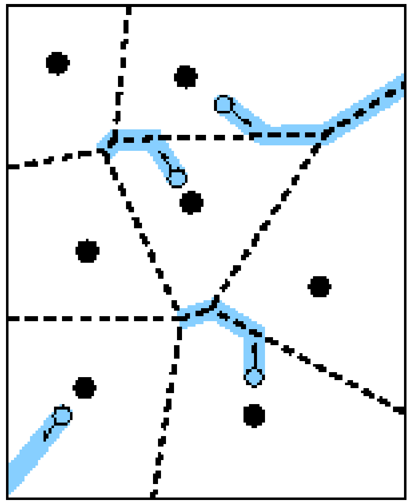

FIG. 3 – Quelques orbites du flux induit par un ensemble de 7 points.

(a) Soit x un point de $\mathbb{R}^2$. Si x n'est pas situé sur une arête ou un sommet de $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$, x appartient à l'intérieur de la cellule $V(p_i)$ d'un point p_i de $\mathcal{P}$. La fonction $d(x)$ est alors simplement la distance $\|x - p_i\|$, elle est donc différentiable et son gradient est $\nabla d(x) = \frac{x-p_i}{\|x-p_i\|}$.

(b) Soit v_1v_2 une arête de diagramme de Voronoï $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ et soit ab l'arête de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$ duale de v_1v_2. Les boules maximales centrées sur v_1v_2 et ne contenant aucun point de $\mathcal{P}$ sont bornées par des sphères du faisceau à points de base $\{a, b\}$ (i. e. des cercles passant par a et b). La sphère minimale de ce faisceau est centrée au milieu m_{ab} de ab. Les sphères de ce faisceau ont une rayon croissant lorsque le centre s'éloigne de m_{ab}.

Si l'arête de Voronoï v_1v_2 intersecte son arête duale ab, $m_{ab} \in v_1v_2$, la distance $d(x)$ d'un point x de v_1v_2 à $\mathcal{P}$ est minimale pour $x = m_{ab}$ et croissante de m_{ab} à v_1 et de m_{ab} à v_2.

Si v_1v_2 n'intersecte pas son arête duale, $m_{ab} \notin v_1v_2$, la distance $d(x)$ est monotone sur v_1v_2 : croissante de v_1 à v_2 si v_1 est plus proche de m_{ab} que v_2.

(c) D'après les questions précédentes, aucun point dans l'intérieur d'une cellule de Voronoï ou dans l'intérieur relatif d'une arête ne peut être un maximum de la fonction distance. Les seuls candidats possibles sont donc les sommets de Voronoï. Soit v un sommet de Voronoï et soit abc le triangle dual de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$. Si le sommet v est inclus dans son triangle dual abc, nous montrons que v est un maximum local de la distance en montrant que pour tout point x appartenant au triangle abc et différent de v, $d(x) < d(v)$. En effet, tout

$x \in abc$ est inclus dans l'une des cellules $V(a), V(b)$ ou $V(c)$ du diagramme $\mathrm{Vor}(\{a, b, c\})$. Supposons sans perte de généralité que $x \in V(a)$. La demi-droite ax intersecte le bord de $V(a)$ en un point x' de $m_{ab}v$ ou $m_{ac}v$ et $d(x) = \|ax\| \leq \|ax'\| \leq \|av\| = d(v)$ avec égalité seulement si $x = v$.

Au contraire, si v n'est pas inclus dans abc, l'une au moins des 3 arêtes, soit par exemple ab n'est pas une arête de Gabriel et la distance $d(x)$ est croissante de v à v' le long de l'arête duale vv'. Le sommet v n'est pas un maximum local de la fonction distance.

(d) Le point x est le centre d'une sphère circonscrite à $\Gamma(x)$, et le point $\gamma(x)$, centre de la plus petite sphère englobant $\Gamma(x)$, est la projection de x sur le simplexe $\mathrm{conv}(\Gamma(x))$ (voir la preuve dans le cours). Il en résulte que $\nabla(x)$ s'annule si et seulement si $x \in \mathrm{conv}(\Gamma(x))$.

Soit x un point critique. On note $\mid \Gamma(x) \mid$ le cardinal de $\Gamma(x)$.

- Si $\mid \Gamma(x) \mid = 1$, $\Gamma(x)$ est réduit à un seul point p de $\mathcal{P}$ et $x = p$ est un minimum de la fonction distance.

- Si $\mid \Gamma(x) \mid = 2$, $\Gamma(x)$ est formé de deux points a, b et $\mathrm{conv}(\Gamma(x))$ est une arête ab de Gabriel de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$ et x le milieu de cette arête ou encore l´intersection de cette arête avec son arête duale. Autour du point x, la distance est croissante le long de xa et xb et décroissante dans toute les autres directions, x est donc un point selle de la fonction distance.

- Si $\mid \Gamma(x) \mid = 3$, x est un sommet de Voronoï inclus dans son triangle dual, donc un maximum local de la fonction distance.

(e) - Un minimum de la fonction distance est un point de l´échantillon. Sa variété stable est réduite à lui-même.

- Un point selle de la fonction distance est l'intersection d'une arête de Delaunay ab avec son arête duale. La variété stable de cette intersection est l'arête ab elle-même.

- Soit v un maximum de la fonction distance. v est un sommet de Voronoï inclut dans son triangle dual. Toutes les orbites des points de ce triangle convergent vers v. Soit t et t' deux triangles adjacents de $\mathrm{Del}(\mathcal{P})$. Si l'arête ab commune à t et t' n'est pas une arête de Gabriel, les deux centres de Voronoï duaux v et v' sont du même côté de la droite ab. On dira que $t \prec t'$ si le centre v' de t' est du même côté de la droite ab que t. Dans ce cas les orbites de tous les points du triangle t' se rassemblent au point v' mais ne s'y arrêtent pas et passent ensuite par v. Finalement , la variété stable $St(v)$ d'un maximum v de la fonction distance est l´union du triangle dual de v et de ses descendants dans la fermeture transitive de la relation $\prec$. Remarquons que les variétés stables $St(v)$ des maxima de la fonction distance sont bornées par les arêtes de Gabriel qui sont les variétés stables des points selles.

(f) Pour construire la variété stable $St(v)$ d'un maximum v, un algorithme simple initialise $St(v)$ avec le triangle t dual de v et maintien dans une pile les arêtes du bord de la région courante qui ne sont pas des arêtes de Gabriel. Chaque étape extrait une arête ab de la pile, rajoute à $St(v)$ le triangle t' incident à ab et encore non inclus dans $St(v)$ et met à jour la pile en y ajoutant les arêtes de t' qui ne sont pas des arêtes de Gabriel et qui n'étaient pas sur le bord de $St(v)$.

(g) Pour montrer que la méthode du flux reconstruit le même objet que le power crust ou la triangulation de Delaunay, il suffit de remarquer que tout triangle t' qui appartient à la variété stable $St(v)$ du maximum v est le dual d'un sommet de Voronoï v' qui est dans la même classe (interne/ externe) que v par rapport à $\mathcal{C}$. En effet si $t' \in St(v)$ l'orbite de v' est constituée par une suite d'arêtes de Voronoï qui se termine en v. La distance à $\mathcal{P}$ est croissante tout le long de cette orbite et en tout point x de l'orbite de v', la distance $d(x)$ est supérieure à $\frac{\mathrm{lfs}(p)}{2}$ où p est l'un des points de $\mathcal{P}$ le plus proche de x. Il serait donc contraire à la condition d'ϵ-échantillonage que l'orbite de v traverse la courbe $\mathcal{C}$.

□