Topics in Computational Geometry

Michel Pocchiola (Ens-Paris)
Michel.Pocchiola@ens.fr
http://www.di.ens.fr/ pocchiol/

1. Rappels d'algèbre et de topologie
2. Classification des surfaces (compactes)
3. Le groupe fondamental des lacets d'une surface
4. Calcul d'un schéma polygonal canonique
5. ...

THÉORIE DES ENSEMBLES - MONOIDES - GROUPES

Ensembles, ensemble des parties d'un ensemble, produit cartésien de deux ensembles, applications, relations d'équivalence, partitions, ensembles quotients, factorisation d'une application par une relation d'équivalence.

Monoides, groupes, isomorphismes, congruences, monoides et groupes quotients, sous-groupes distingués, homomorphismes, factorisations, groupe libre, somme (ou produit libre) de deux groupes, somme amalgamée de deux groupes.

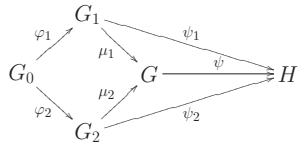
[1] Nathan Jacobson. Basic Algebra I. Freeman, 1974.

[2] J. Berstel. Transductions and context-free languages. Teubner, 1979.

SOMME AMALGAMÉE DE DEUX GROUPES

Definition 1. *Soient $\varphi_1 : G_0 \to G_1$ et $\varphi_2 : G_0 \to G_2$, deux homomorphismes de groupes. On appelle somme de G_1 et G_2 amalgamée par G_0 le groupe quotient G du monoide des mots sur l'alphabet $G_1 \cup G_2$ par la congruence engendré par les $e_i \sim 1$, $g_i g_i' \sim g_i \times_i g_i'$, $\varphi_1(g_0) \sim \varphi_2(g_0)$ ($g_i, g_i' \in G_i$, e_i élément neutre de G_i, $g_0 \in G_0$) et on écrit $\mu_i : G_i \to G$ pour les homomorphismes induits.*

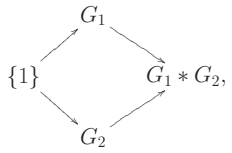
Theorem 1. *Pour tout groupe H et tous homorphismes $\psi_1 : G_1 \to H$ et $\psi_2 : G_2 \to H$ tels que $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$ il existe un homomorphisme $\psi : G \to H$ tel que le diagramme*

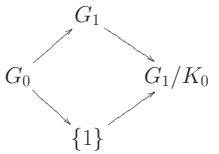


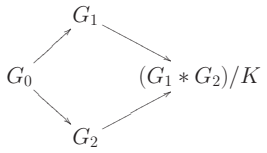
soit commutatif. (Cette propriété caractérise G à isomorphisme près.) □

La somme de G_1 et G_2 amalgamée par G_0 est notée $G_1 *_{G_0} G_2$.

SOMME . . . (SUITE)







- la somme de G_1 et G_2 amalagamée par le groupe trivial est notée $G_1 * G_2$ et est appelée la somme libre de G_1 et G_2; dans le cas où G_1 et G_2 sont les groupes monogènes engendrés par les éléments a et b la somme libre de G_1 et G_2 est appelée le groupe libre à deux générateurs et est notée $L(a, b)$;
- K_0 est le sous-groupe distingué engendré par les $\varphi_1(g)$ ($g \in G_0$),
- K est le sous-groupe distingué engendré par les $\varphi_1(g)\varphi_2(g)^{-1}$ et $\varphi_2(g)\varphi_1(g)^{-1}$ ($g \in G_0$).

ESPACE TOPOLOGIQUE – HOMÉOMORPHISME

Definition 2. *Un espace topologique est un ensemble X muni d'une topologie $\mathcal{U}$, i.e. une collection de sous-ensembles de X, appelés les ouverts de X, vérifiant les trois propriétés suivantes*

1. *L'ensemble vide $\emptyset$ et l'ensemble X sont des ouverts;*
2. *Une union d'ouverts est un ouvert;*
3. *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Fermés. Un voisinage d'un point x d'un espace topologique est un ouvert contenant x. Une base d'ouverts est une collection d'ouverts telle que tout ouvert est réunion d'éléments de la base d'ouverts. *Espace séparé, espace connexe, espace compact.*

$\mathcal{U}$,$\mathcal{U}'$ deux topologies sur X. On dit que $\mathcal{U}'$ est plus fine que $\mathcal{U}$ si $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}$.

Sous-espace topologique : $Y \subseteq X$ muni de la topologie *relative*, i.e. $\{Y \cap V \mid V \in \mathcal{U}\}$.

Definition 3. *Une application $f : X \to Y$ d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est dite continue si l'image réciproque par f d'un ouvert quelconque de Y est un ouvert de X. (Continuité en un point – une application est continue ssi elle est continue en chaque point.)*

Homéomorphismes, espaces homéomorphes $X \approx Y$.

ESPACE MÉTRIQUE

Definition 4. *Un espace métrique est un ensemble X muni d'une fonction distance (ou métrique) $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois propriétés suivantes:*

1. *$\rho(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;*
2. *$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ pour tout $x, y \in X$;*
3. *$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ pour tout $x, y, z \in X$.*

La boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ est l'ensemble des $y \in X$ tel que $\rho(x, y) < r$.

La collection des unions quelconques de boules ouvertes d'un espace métrique est une topologie sur cet espace métrique.

$\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}$

$\mathbb{R}^n$, distance euclidienne: $d(x, y) = \|x - y\| = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$, boule unité ouverte $\mathbb{B}^n$ de $\mathbb{R}^n$, sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n \approx \mathbb{B}^n$ via par exemple $x \mapsto x/1 - \|x\|$

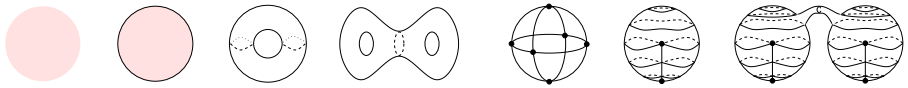
$\mathbb{R}^n \approx \mathbb{S}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 1)\}$ via la projection stéréographique.

Une courbe est un espace topologique connexe localement homéomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$:

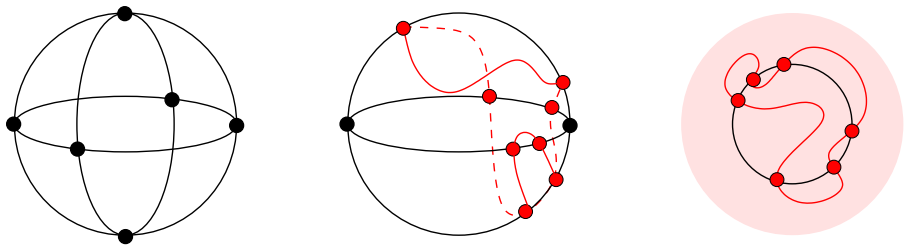
$$(0, 1), [0, 1), [0, 1], \mathbb{S}^1.$$

Une surface est un espace topologique connexe localement homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ ou à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{B}^2, \overline{\mathbb{B}}^2, \mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{T}_2, \mathbb{P}_2, \mathbb{U}_2, \ldots$$



JORDAN-SCHÖNFLIES THEOREM



$\mathbb{S}^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Theorem 2. *Let $S \subseteq \mathbb{S}^2$ homeomorphic to $\mathbb{S}^1$. Then $S = h(\mathbb{S}^1)$ for some homeomorphism h of $\mathbb{S}^2$.* □

Theorem 3. *Toute surface compacte est homéomorphe à une surface triangulée.* □

[1] C. Thomassen. The jordan-schönflies theorem and the classification of surfaces. Amer. Math. Monthly, 99:116–130, 1992.

TOPOLOGIE PRODUIT, QUOTIENT − RECOLLEMENT

Soient X_1 et X_2 deux espaces topologiques. La *topologie produit* sur $X_1 \times X_2$ est la topologie la moins fine rendant continues les projections canoniques $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ et $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$.

Soit X un espace topologique et $f : X \to Y$ une application surjective. Alors

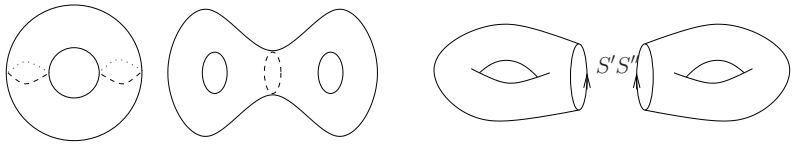
$$\{V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \text{ est un ouvert de } X\}$$

est une topologie sur Y, appelée la *topologie quotient*. La topologie quotient est la plus fine (i.e. celle qui contient le plus d'ouverts) rendant continue l'application f,

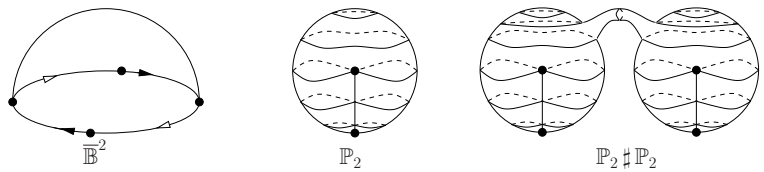
Soit X_α une famille d'espaces topologiques et soit $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ la somme disjointe des X_α. La *topologie somme disjointe* sur X est la topologie la plus fine rendant continues les injections canoniques $i_\alpha : X_\alpha \to X$ (i.e. une partie U de X est ouverte si et seulement si $i_\alpha^{-1}(U)$ est un ouvert de X_α pour tout α).

Soient X et Y deux espaces topologiques, A un sous-espace de X et $f : A \to Y$ une application continue. On appelle *recollement de X sur Y par f* l'espace topologique $X \bigsqcup_f Y$ quotient de la somme disjointe $X \bigsqcup Y$ par la relation d'équivalence engendrée par la relation $x \sim y$ si $x \in A, y \in Y$ et $f(x) = y$.

SOMME CONNEXE DE TORES ET DE PLANS PROJECTIFS

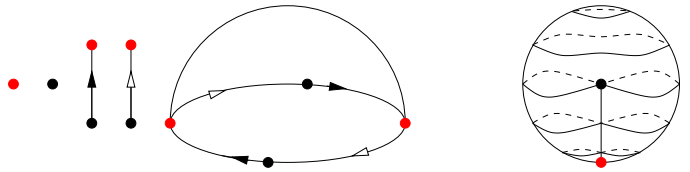


1. Le tore $\mathbb{T}_1$ est le produit de $\mathbb{S}^1$ par $\mathbb{S}^1$; Le tore $\mathbb{T}_n$, $n \geq 2$, est défini comme la somme connexe $\mathbb{T}_n = \underbrace{\mathbb{T}_1 \sharp \mathbb{T}_1 \sharp \cdots \sharp \mathbb{T}_1}_{n}$ de n exemplaires de $\mathbb{T}_1$; Le tore $\mathbb{T}_n$ percé d'un trou est noté $\mathbb{V}_n$.



2. Le plan projectif $\mathbb{P}_2$ est défini comme le quotient de la sphère $\mathbb{S}^2$ par la relation d'équivalence $x \sim -x$. Le tore/bouteille de Klein $\mathbb{U}_2 = \mathbb{P}_2 \sharp \mathbb{P}_2$, et par récurrence $\mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n \sharp \mathbb{P}_2$. Le plan projectif percé d'un trou est un ruban de Möbius.
3. $\mathbb{T}_1 \sharp \mathbb{P}_2 = \mathbb{U}_2 \sharp \mathbb{P}_2$, $\mathbb{U}_{2n+1} = \mathbb{T}_n \sharp \mathbb{P}_2$, $\mathbb{U}_{2n+2} = \mathbb{T}_n \sharp \mathbb{U}_2$.

COMPLEXES CELLULAIRES



- Une n-cellule ouverte (fermée) est une copie de la boule unité ouverte (fermée) de $\mathbb{R}^n$. (Par convention une 0-cellule est un singleton et son bord est l'ensemble vide.)
- Recette des complexes cellulaires de dimension finie:
  (a) Commencer par un ensemble discret X^0 de 0-cellules.
  (b) Par récurrence construire le n-squelette X^n à partir de X^{n-1} en recollant des n-cellules fermées e_α^n sur X^{n-1} par des applications continues $\varphi_\alpha : \partial e_\alpha^n \to X^{n-1}$.
  (c) Arrêter la récurrence après un nombre fini d'étapes.

GRAPHES

un graphe est un complexe celullaire de dimension 1, arbres, arbres couvrants, parcours de graphes, algorithmique des graphes, etc.

[1] R. E. Tarjan. Data Structures and Network Algorithms, volume 44 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1983

RECOLLEMENT D'ESPACES MÉTRIQUES

Recollement par isométrie. Soient X et Y deux espaces métriques, A une partie compacte de X et $f : A \to Y$ une isométrie. Sur $X \cup Y$, soit R la relation d'équivalence qui identifie a et $f(a)$ ($a \in A$). L'espace Z quotient de $X \cup Y$ par la relation R est muni de la distance définie par

$$\begin{aligned} d(\overline{x},\overline{x}') &= d(x,x') \qquad x,x' \in X \\ d(\overline{y},\overline{y}') &= d(y,y') \qquad y,y' \in Y \\ d(\overline{x},\overline{y}) &= \inf_{a\in A}(d(x,a)+d(f(a),y)) \qquad x \in X, y \in Y. \end{aligned}$$

ESPACES HOMÉOTOPES

Deux applications continues $f_0, f_1 : (X,x) \to (Y,y)$ sont dites *homotopes* et on note $f_0 \sim f_1$ s'il existe une déformation continue $f_s : (X,x) \to (Y,y)$ ($0 \le s \le 1$) de f_0 en f_1. (Déformation continue au sens où l'application $F : X \times I \to Y$ définie par $F(x,s) = f_s(x)$ est continue.)

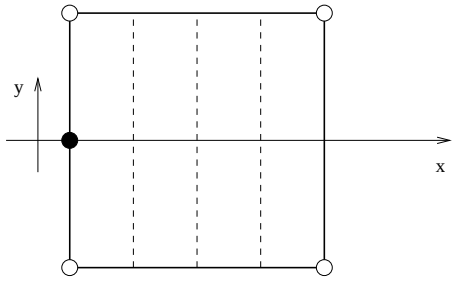
On appelle équivalence d'homotopie une application continue $f : (X,x) \to (Y,y)$ qui posséde un « inverse à homotopie près», c'est-à-dire une application $g : (Y,y) \to (X,x)$ telle que

$$f \circ g \sim \mathrm{id}(Y), \qquad g \circ f \sim \mathrm{id}(X).$$

On dit que les espaces pointés (X,x) et (Y,y) sont *homéotopes*. *Rétraction, rétraction par déformation.*

Exemples : espaces contractiles - couronne plane - paquerette ou bouquet de cercles - ruban de Mœbius.

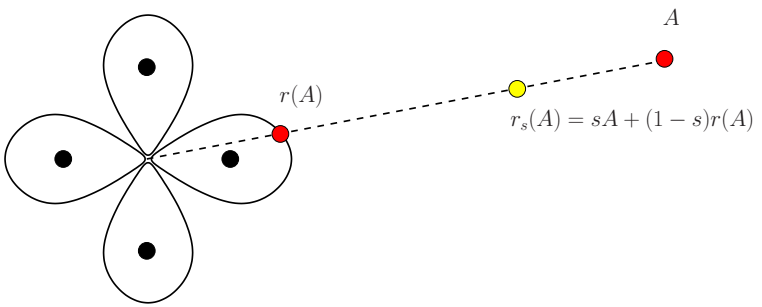
RUBAN DE MÖBIUS



Soit $\mathbb{M}$ le ruban de Möbius quotient de $[0,1]\times[-1,+1]$ par la relation d'équivalence $(0,y) \sim (1,-y)$, soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{M} \mid y = 0\}$ son cercle radial ($C \approx \mathbb{S}^1$) et soit $f : \mathbb{M} \to C$ l'application continue qui à (x,y) associe $(x,0)$. (*Pourquoi f est-elle bien définie? continue?*) Je dis que f est une équivalence d'homotopie. En effet notons $g : C \to \mathbb{M}$ l'injection canonique de C dans $\mathbb{M}$. Alors $f \circ g = \mathrm{id}(C) \sim \mathrm{id}(C)$ et $g \circ f = f \sim \mathrm{id}(\mathbb{M})$ via $f_s : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$, $f_s(x,y) = (x,(1-s)y)$, $s \in [0,1]$. (*Pourquoi f_s est-elle bien définie? continue?*)

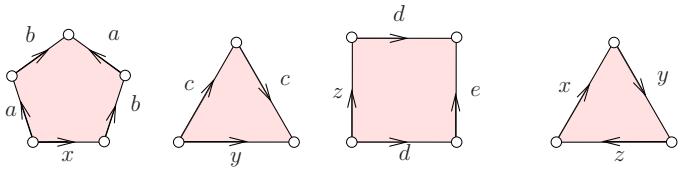
Soient $c : [0,1] \to \mathbb{M}$, $c(t) = (t,0)$, et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{M}$ le lacet définie par $\gamma(t) = (0,4t)$ pour $0 \le t \le 1/4$; $(4t-1,1)$ pour $1/4 \le t \le 1/2$; $(4t-2,-1)$ pour $1/2 \le t \le 3/4$;$(1,4t-4)$ pour $3/4 \le t \le 1$. On a $\gamma \sim cc$ via $f_s \circ \gamma$ (plus une reparamétrization).

PÂQUERETTE À n PÉTALES



Le plan privé de n points est homéotope au bord de la pâquerette à n pétales (bouquet de n cercles).

SURFACES DÉFINIES PAR UN SYSTÈME DE RELATIONS



Handle/Poignée:	$aba^{-1}b^{-1}x^{-1}=1,$	$x=aba^{-1}b^{-1},$
Crosscap/Bonnet croisé:	$ccy^{-1}=1,$	$y=cc,$
Cuff/Cylindre:	$ded^{-1}z^{-1}=1,$	$z=ded^{-1},$
Remainder/Disque:	$xyz=1.$	

- $S=\{a,b,c,\ldots\}$ un alphabet de symboles; l'inverse a^{-1} d'un symbole a; $(a^{-1})^{-1}=a$;
- Relation : $A=B$ où $A,B\in\hat{S}^*=(S\cup S^{-1})^*$; systèmes de relations; deux systèmes de relations sont dits équivalents si l'on peut passer d'un système à l'autre par substitution et transposition de symboles:

$$aX=Y\Leftrightarrow X=a^{-1}Y,\qquad Xa=Y\Leftrightarrow X=Ya^{-1}.$$

– Complexe cellulaire associé à un système de relations; sommets, arêtes, faces.

SURFACES DÉFINIES PAR UN SYSTÈME DE RELATIONS

Theorem 4. *Le complexe cellulaire associé à un système de relations est une surface si et seulement si le système de relations satisfait les propriétés suivantes*

1. *aucun symbole n'apparait plus de deux fois;*
2. *toute partition du système de relations en deux systèmes de relations sépare les deux occurences (qui existent) d'au moins un symbole.*

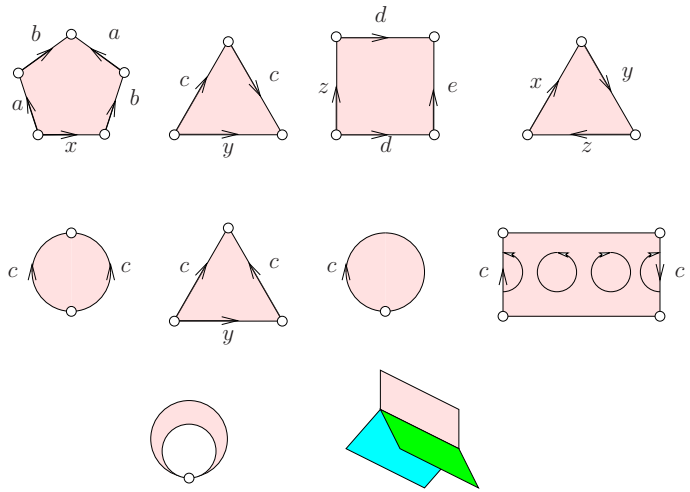
Une surface est dite orientable si elle est définissable par un sytème de relations de la forme $A=1$ tel que tout symbole x apparaissant deux fois apparaisse une fois sous la forme x et une fois sous la forme x^{-1}.

- Sommets (internes, frontaliers), arêtes (internes, frontalières) et faces d'une surface;
- Caractéristique d'Euler d'une surface:

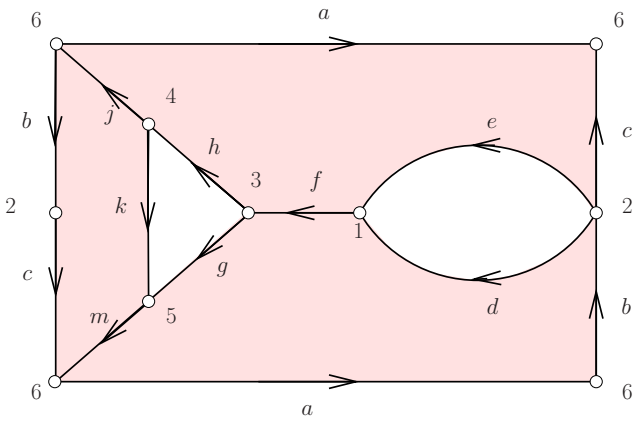
$$\chi=\#\text{faces}-\#\text{arêtes}+\#\text{sommets}.$$

- Bords d'une surface : cycles d'arêtes frontalières.
- Surfaces fermées.

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

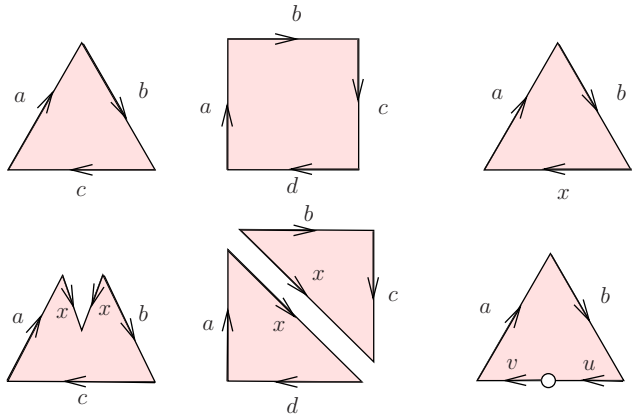


BOUTEILLE DE KLEIN À DEUX TROUS



$$ac^{-1}efhj=1,\qquad bcm^{-1}k^{-1}j=1,\qquad abdfgm=1.$$

SUBDIVISER ET COMPOSER − INCISER



$$\begin{array}{lcl} ABC = D & \Longleftrightarrow & AxC = D, B = x \\ Axx^{-1}B = D & \Longleftrightarrow & AB = D \\ AxBx^{*} = D & \Longleftrightarrow & AuvB(uv)^{*} = D \end{array}$$

FORME CANONIQUE

Theorem 5. *Tout surface est homéomorphe à une surface définie par un système de relations de la forme*

$$\begin{cases} x_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}, & i = 1, \ldots, p; \\ y_i = c_i c_i, & i = 1, \ldots, q; \\ z_i = d_i e_i d_i^{-1}, & i = 1, \ldots, r; \\ x_1 \ldots x_p y_1 \ldots y_q z_1 \ldots z_r = 1. \end{cases}$$

avec $p = 0$ ou $q = 0$. De plus la surface est orientable si seulement si $q = 0$, son nombre de bords est r et sa caractéristique d'Euler est à $2 - 2p - q - r$. □

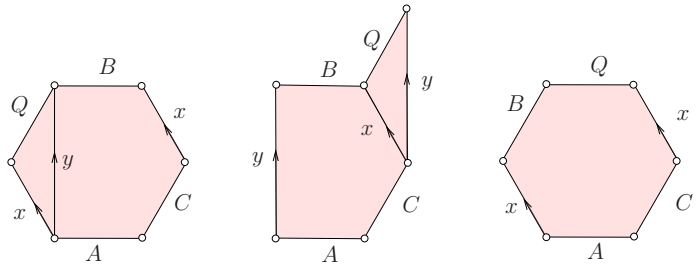
Une surface de caractéristique d'Euler égale à 2 est une sphère ($1 = 1$).

Une surface de caractéristique d'Euler égale à 0 est un tore, un cylindre, un ruban de Möbius ou une bouteille de Klein:

$$\begin{array}{llll} aba^{-1}b^{-1} = 1 & ded^{-1}d'e'd'^{-1} & = & 1 \\ ccded^{-1} = 1 & ccc'c' & = & 1. \end{array}$$

Une surface de caractéristique d'Euler égale à 1 est un disque ($ded^{-1} = 1$) ou un plan projectif ($cc = 1$).

TWO RULES OF CIRCULATION



$$\begin{array}{rcl} AxQBxC = D & \Longleftrightarrow & AxBxQ^{-1}C = D \\ AxQBx^{-1}C = D & \Longleftrightarrow & AxBQx^{-1}C = D \end{array}$$

Rule I. If a symbol x occurs twice in the same relation, both times as x, then a block Q which is on one side of x in one position can be removed, provided Q^{-1} is put on the same side of x in the other position.

Rule II. If a symbol x occurs twice in the same relation, once as x and once as x^{-1}, then a block Q which is on one side of x in one position can be moved (without inversion) to the other side of x^{-1}.

PREUVE

Step 1. Réduire le système de relations à une seule relation.

Step 2. Assembler les "crosscaps".

$$\begin{cases} y_i = c_i c_i, & i = 1, \ldots, q; \\ y_1 \ldots y_q Q = 1. \end{cases}$$

Step 3. Assembler les anses.

$$\begin{cases} x_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}, & i = 1, \ldots, p; \\ y_i = c_i c_i, & i = 1, \ldots, q; \\ x_1 \ldots x_p y_1 \ldots y_q R = 1. \end{cases}$$

Step 4. Assembler les manches.

$$\begin{cases} x_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}, & i = 1, \ldots, p; \\ y_i = c_i c_i, & i = 1, \ldots, q; \\ z_i = d_i e_i d_i^{-1}, & i = 1, \ldots, r; \\ x_1 \ldots x_p y_1 \ldots y_q z_1 \ldots z_r = 1. \end{cases}$$

Step 5. Transformer les anses en crosscaps (s'il y a au moins un crosscap)

PREUVE DÉTAILLÉE

Step 1. Réduire le système de relations à une seule relation.

Step 2. Assembler les "crosscaps".

$$A\boxed{B}cCcD \to Ac\boxed{CB^{-1}}cD \to AccBC^{-1}D \to \cdots$$

Step 3. Assembler les anses.

$$\begin{aligned} A\boxed{B}aCbDa^{-1}Eb^{-1}F &\to AaCbDa^{-1}\boxed{BE}b^{-1}F \to Aa\boxed{Cb}BEDa^{-1}b^{-1}F \to \\ Aa\boxed{BEDC}ba^{-1}b^{-1}F &\to Aaba^{-1}b^{-1}BEDCF \to \cdots \end{aligned}$$

Step 4. Assembler les manches.

$$\begin{cases} x_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}, & i = 1, \ldots, p; \\ y_i = c_i c_i, & i = 1, \ldots, q; \\ z_i = d_i e_i d_i^{-1}, & i = 1, \ldots, r; \\ x_1 \ldots x_p y_1 \ldots y_q z_1 \ldots z_r = 1. \end{cases}$$

Step 5. Transformer les anses en crosscaps (s'il y a au moins un crosscap)

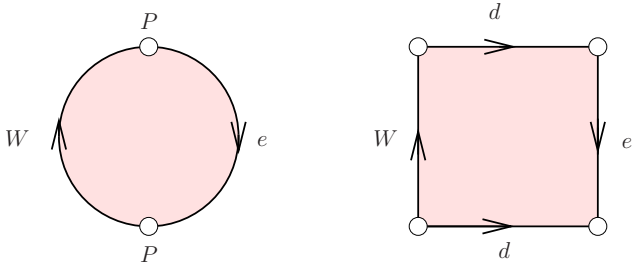
$$Aab\boxed{a^{-1}b^{-1}}ccF \mapsto Aa\boxed{bcb}acF \mapsto Aaab^{-1}\boxed{c^{-1}}b^{-1}cF \mapsto Aaab^{-1}b^{-1}ccF \mapsto \cdots$$

ASSEMBLER LES MANCHES

Sans difficulté (!?) le système peut se réécrire

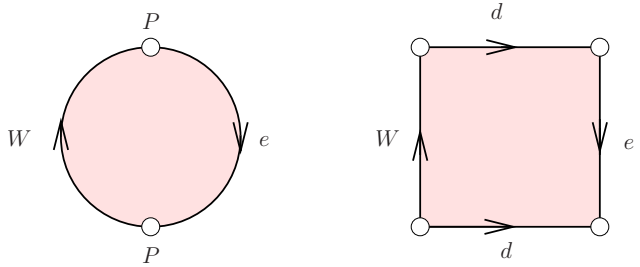
$$\begin{cases} x_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}, & i = 1, \ldots, p; \\ y_i = c_i c_i, & i = 1, \ldots, q; \\ z_i = d_i e_i d_i^{-1}, & i = 1, \ldots, r; \\ x_1 \ldots x_p y_1 \ldots y_q z_1 \ldots z_r S = 1. \end{cases}$$

où S est le mot vide ou un nouveau symbole e.



$$W = \cdots a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \cdots c_i c_i \cdots d_i e_i d_i^{-1} \cdots$$

ASSEMBLER LES MANCHES



Insérons dd^{-1} à gauche de e et décalons d vers la gauche par application répétée des règles de circulation pour passer les crosscaps, les manches et les anses:

1. le bloc $d_i e d_i^{-1} d$ se réécrit en $dd_i e_i d_i^{-1}$;
2. le bloc $c_i c_i d$ se réécrit successivement en $c_i d^{-1} c_i$ et $dc_i c_i$;
3. le bloc $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} d$ se reécrit successivement en $a_i d b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$, $a_i b_i d a_i^{-1} b_i^{-1}$, $a_i b_i a_i^{-1} d b_i^{-1}$, et $d a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$.

Au final nous obtenons la forme $dWd^{-1}e = 1$, équivalente à $Wd^{-1}ed = 1$ par application de deux transpositions.

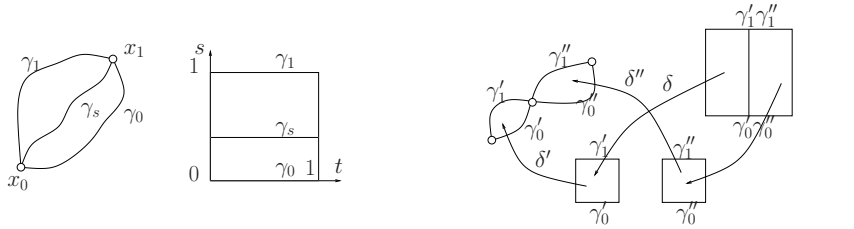
NOTES

[1] T. Brahana. Systems of circuits on 2-dimensional manifolds. Ann. Math., 23:144–168, 1921.

[2] W. S. Massey. A Basic Course in Algebraic Topology. Springer-Verlag, 1991.

[3] R. C. James. Combinatorial topology of surfaces. In A. K. Stehney, T. K. Milnor, J. E. D'Atri, and T. F. Banchoff, editors, Selected papers on geometry, volume 4 of The Raymond W. Brink Selected Mathematical Papers, pages 79–114. The Mathematical Association of America, 1979. Reprint from Mathematics Magazine, vol. 20 (1955), pp. 1–39.

GROUPE FONDAMENTAL



1. Un *chemin* dans X est une application continue de l'intervalle $[0,1]$ dans X. Origine/extrémité d'un chemin. Le *composé* $\gamma = \gamma'\gamma''$ de deux chemins γ' et γ'' dans X tels que l'origine de γ'' coincide avec l'extrémité de γ' est défini par $\gamma(t) = \gamma'(2t)$ si $0 \leq t \leq 1/2$; $\gamma''(2t-1)$ sinon. La composition de chemins est associative à reparamétrisation près. Chemin inverse $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. Composantes connexes par arcs, espace connexe par arcs.
2. Deux chemins γ_0 et γ_1 sont dits *homotopes* (à extrémités données), et on note $\gamma_0 \sim \gamma_1$, s'il existe une application continue $\delta : I \times I \to X$ telle que $\delta(t,0) = \gamma_0(t)$, $\delta(t,1) = \gamma_1(t)$ pour tout $0 \leq t \leq 1$, et $\delta(0,s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\delta(1,s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ pour tout $0 \leq s \leq 1$.

Proposition 1. *La classe d'homotopie du chemin composé ne dépend que des classes des chemins composants. (Associativité, élements neutres, inverse.)* □

GROUPE FONDAMENTAL

Un *lacet* dans X en $x \in X$ (ou de base x) est un chemin dans X dont l'origine et l'extrémité sont confondues en x.

Definition 5. *Le groupe fondamental (ou de Poincaré) de X en x est le quotient $\pi(X,x)$ par la relation d'homotopie de l'ensemble $\mathcal{L}(X,x)$ des lacets en x muni de la loi de composition des lacets.*

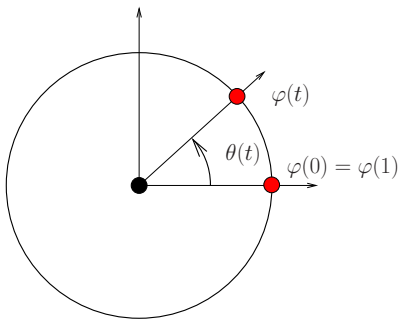
Dépendance du point base – espace simplement connexe : $\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n$ –

Theorem 6. *La sphère $\mathbb{S}^2$ est simplement connexe.*
Le groupe fondamental du cercle $\mathbb{S}^1$ est isomorphe $\mathbb{Z}$.
Le groupe fondamental du tore $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. □

Proof. Soient $X = U_1 \cup U_2$ où U_1 et U_2 sont des ouverts simplement connexe et où $U_0 = U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs. Alors X est simplement connexe. Soit f un lacet en $x \in U_0$ dans X. On écrit le lacet f comme le composé $f_1 f_2 \dots f_k$ de k chemins où f_i est un chemin dans U_1 ou dans U_2 d'origine x_i et d'extremité x_{i+1}. (*Nombre de Lebesgue.*) Soit γ_i un chemin de x à x_i dans U_1, U_2 ou mieux dans U_0 selon que $x_i \in U_1, U_2$ ou U_0. Le lacet f est alors homotope au composé des lacets $\varphi_i = \gamma_i f_i \gamma_{i+1}^{-1}$ dans $U_{i'}$. De $\varphi_i \sim 1$ on conclut. □

NOMBRE DE LEBESGUE

GROUPE FONDAMENTAL DE $\mathbb{S}^1$



$$\exp(z) = \sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{S}^1, \qquad \varphi(t) = \exp(i\theta(t)), \qquad \deg(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \theta'(t)dt = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{d\varphi}{\varphi}.$$

EFFET D'UNE APPLICATION CONTINUE

Soit $f : (X, x) \to (Y, y)$ une application continue de l'espace pointé (X, x) dans l'espace pointé (Y, y). L'application qui à $\gamma \in \mathcal{L}(X, x)$ associe le lacet $f \circ \gamma \in \mathcal{L}(Y, y)$ est compatible avec la relation d'homotopie des lacets. L'application induite sur les groupes d'homotopies est un homomorphisme de groupes noté $\pi(f)$:

$$\begin{array}{ccc} (X,x) & \xrightarrow{f} & (Y,y) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\downarrow \\ \pi(X,x) & \xrightarrow{\pi(f)} & \pi(Y,y). \end{array}$$

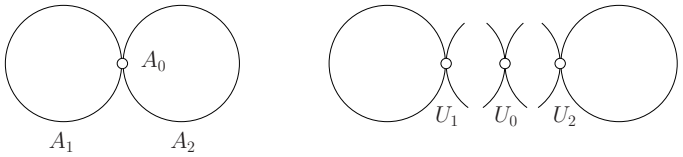
Theorem 7. $\pi(g \circ f) = \pi(g) \circ \pi(f)$, $\pi \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ \pi$. □

Theorem 8. *Deux espaces homéomorphes ont des groupes fondamentaux isomorphes.* □

Theorem 9. *Des applications homotopes induisent des homomorphismes égaux.* □

Theorem 10. *Deux espaces homéotopes ont des groupes fondamentaux isomorphes.* □

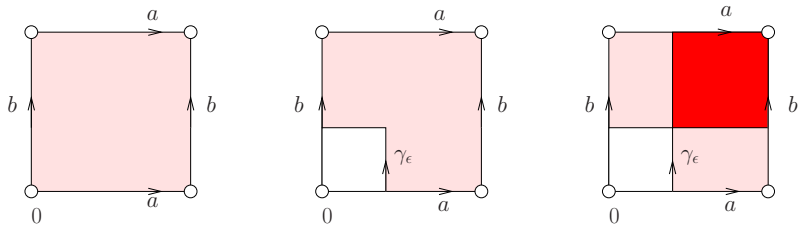
LE THÉORÈME DE SEIFERT ET VAN KAMPEN



Theorem 11 (Théorème de Seifert et Van Kampen.)**.** *Soit $X = U_1 \cup U_2$ où U_1 et U_2 sont des ouverts connexes par arcs ainsi que $U_0 = U_1 \cap U_2$, et soit $x \in U_0$. Alors $\pi(X, x)$ est la somme de $\pi(U_1, x)$ et $\pi(U_2, x)$ amalgamée par $\pi(U_0, x)$.* □

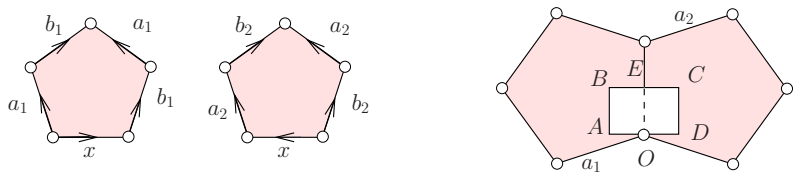
- Le groupe fondamental d'un bouquet de n cercles est un groupe libre à n générateurs.

GROUPE FONDAMENTAL DU TORE PERCÉ D'UN TROU



Proposition 2. *Le groupe fondamental du tore percé d'un trou est un groupe libre à deux générateurs.* □

GROUPE FONDAMENTAL DE $\mathbb{T}_n$



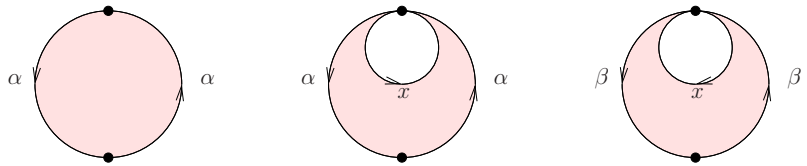
Proposition 3. *Le groupe fondamental de $\mathbb{T}_2$ est le quotient du groupe libre à quatre générateurs $L(a_1, b_1, a_2, b_2)$ par le sous-groupe distingué engendré par*

$$[a_1, b_1][a_2, b_2] = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}.$$

□

Proposition 4. *Le groupe fondamental de $\mathbb{V}_n$ est un groupe libre à $2n$ générateurs $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$, le bord γ de $\mathbb{V}_n$ a pour classe $\overline{\gamma} = [a_1, b_1][a_2, b_2] \ldots [a_n, b_n]$. Le groupe fondamental de $\mathbb{T}_n$ est isomorphe au quotient du précédent par le sous-groupe distingué engendré par $\overline{\gamma}$.* □

GROUPE FONDAMENTAL DE $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{U}_n$



Proposition 5. *Le groupe fondamental du plan projectif est un groupe à deux éléments.* □

Proposition 6. *Le groupe fondamental de $\mathbb{U}_n$ est isomorphe au quotient du groupe libre à n générateurs $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ par le sous-groupe distingué engendré par $\alpha^2\beta^2 \ldots \nu^2$.* □

NOTES

[1] W. S. Massey. A Basic Course in Algebraic Topology. Springer-Verlag, 1991.

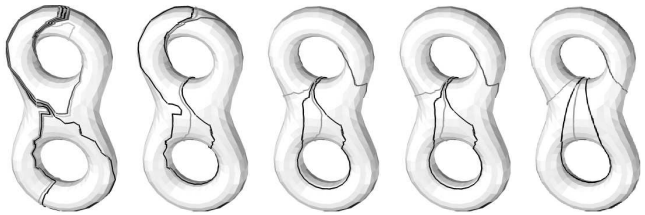
[2] André Gramain. Topologie des surfaces. Presses Universitaires de France, 1971.

[3] Allen Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge, 2003.

NOTES

NOTES

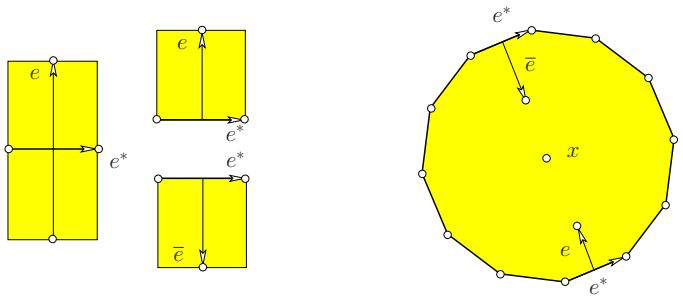
CALCUL D'UN SCHÉMA POLYGONAL CANONIQUE



Pour toute surface M fermée orientable de genre g nous avons construit un bouquet de $2g$ lacets $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g$ sur M tel que la surface obtenue après découpage le long de ces lacets soit le polygone $[a_1, b_1][a_2, b_2] \ldots [a_g, b_g]$, où $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$. De plus ces lacets sont des lacets génerateurs du groupe fondamental de la surface. Un tel ensemble de lacets est appelé un ensemble canonique de générateurs.

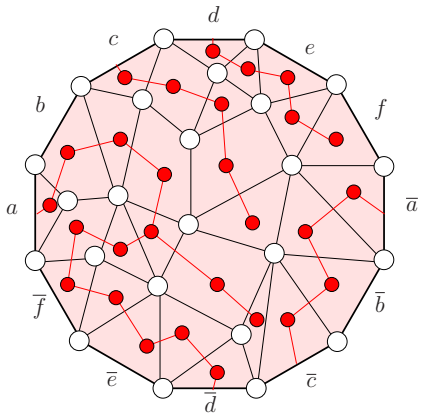
Theorem 12. *Un ensemble canonique de générateurs d'une surface orientable fermée triangulée de genre g à n triangles est calculable en temps $O(gn)$.* □

RÉDUCTION À UNE SEULE RELATION



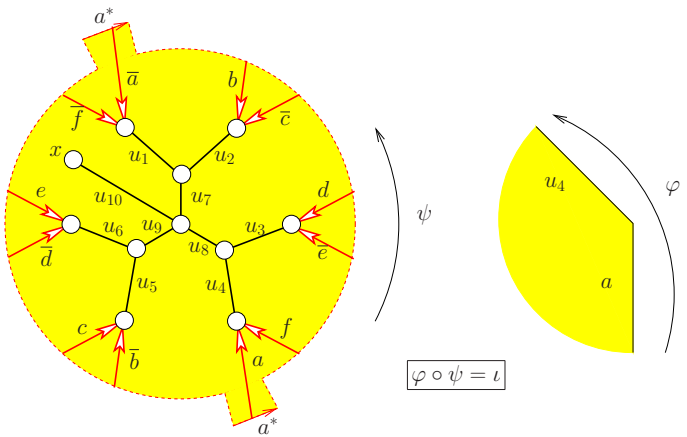
- M une surface triangulée fermée orientable de genre g;
- G un sous-graphe du graphe sommets-arêtes de la surface M tel que $M \setminus G$ soit un disque ouvert.
- S un arbre couvrant de G de racine x, T l'ensemble des arêtes de S, E l'ensemble des arêtes de $G \setminus T$. Les arêtes de T sont orientées vers la racine x et les arêtes de E sont orientées arbitrairement. Elimination récursive des arêtes de T de degré entrant nul.
- N_G un voisinage tubulaire de G.

EXEMPLE



Le complémentaire de l'ensemble des arêtes d'un arbre couvrant du graphe faces-arêtes de la surface est l'ensemble des arêtes d'un schéma de la surface.

EXEMPLE



- $E = \{a, b, c, d, e, f\}$, $T = \{u_1, u_2, \ldots, u_{10}\}$

$$\boxed{a u_4 u_8 \bar{u}_9 \bar{u}_5 b \bar{c} u_5 \bar{u}_6 d e u_6 u_9 u_{10} x \bar{u}_{10} \bar{u}_7 \bar{u}_1 f \bar{a} u_1 \bar{u}_2 \bar{b} \bar{c} u_2 u_7 \bar{u}_8 \bar{u}_3 \bar{d} \bar{e} u_3 \bar{u}_4 \bar{f} = 1}$$

COMBINATORIAL PATHS

Let I be a finite set equipped with an involution ι without fixed point.

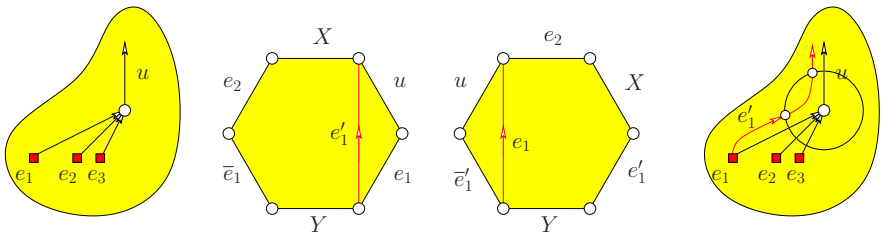
A system of paths on I is a pair (Γ, Σ) where

1. $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i\in I}$ where γ_i is an edge-path $\gamma_i(1)\gamma_i(2)\cdots\gamma_i(k_i)$ such that $\gamma_{\iota(i)}$ is the inverse of the edge-path γ_i.
2. $\Sigma = \{\sigma_e\}_{e\in\hat{G}}$ where σ_e is an enumeration $\sigma_e = \sigma_e(1)\sigma_e(2)\dots\sigma_e(h_e)$ of the set of pairs (i,j) such that $\gamma_i(j) = e$.

It is convenient to use the following terminology. A node is a pair (i,j) where $i \in I$ and $1 \le j \le k_i$. The inverse of the node (i,j) is the node $(\iota(i), k_i - j + 1)$. The successor operator is denoted ω and is defined as the map that assigns to the node (i,j) the node $(i, j+1)$ if $j < k_i$; the sink of the edge $\gamma_i(k_i)$ otherwise.

A system of paths (Γ,Σ) on I is called planar if for each vertex x of the surface the reduction modulo $\{\sigma\omega(\iota(\sigma))\}$ of the circular concatenation of the words σ_e associated with the circular list of edges e incoming at x is a circular enumeration of the nodes of $\omega^{-1}(x)$.

RÉDUCTION À UN SEUL SOMMET – BOUQUET DE CERCLES



Choose a minimal tree-edge u and let $e_1, e_2, \dots, e_k$ be the sequence of its incoming paths in $\hat{E}$. Assume $k \ge 2$. Then we can write

$$M = e_1 u X e_2 \overline{e}_1 Y$$

and replace the path e_1 by a path $e'_1 \sim e_1 u$ ($L(u) = e'_1 u$) to get $M = e'_1 X e_2 u \overline{e}'_1 Y$. Now u is a minimal tree-edge whose sequence of incoming paths is $e_2, e_3, \dots, e_k$. By a repeated application of this principle we arrive at the situation where the sequence of incoming paths of u reduced to e_k and where $L(u) = e'_1 e'_2 \dots e'_{k-1} u$. In that case $M = e_k u X \overline{u}\overline{e}_k Y$ and replacing e_k by $e'_k \sim e_k u$ we get $M = e'_k X \overline{u} u \overline{e}'_k Y$ with $L(u) = e'_1 e'_2 e_3 \dots e'_k u$. Now u is minimal but its sequence of incoming paths is reduced to the empty sequence. Then we can cancel $\overline{u}u$ to get $L(u) = e'_1 e'_2 \dots e'_k$.

RÉDUCTION À UN SEUL SOMMET – BOUQUET DE CERCLES

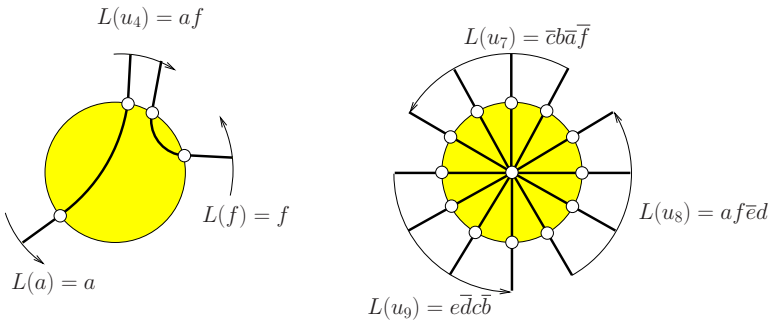
$$\begin{aligned}
[au_4]u_8\overline{u}_9\overline{u}_5b\overline{c}u_5\overline{u}_6deu_6u_9u_{10}x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_1f\overline{a}u_1\overline{u}_2\overline{b}\overline{c}u_2u_7\overline{u}_8\overline{u}_3\overline{d}\overline{e}u_3\overline{u}_4\overline{f} &= 1 \qquad a \leftarrow au_4\\
au_8\overline{u}_9\overline{u}_5b\overline{c}u_5\overline{u}_6deu_6u_9u_{10}x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_1[fu_4]\overline{a}u_1\overline{u}_2\overline{b}\overline{c}u_2u_7\overline{u}_8\overline{u}_3\overline{d}\overline{e}u_3\overline{u}_4\overline{f} &= 1 \qquad f \leftarrow fu_4\\
au_8\overline{u}_9\overline{u}_5b\overline{c}u_5\overline{u}_6deu_6u_9u_{10}x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_1f\overline{a}u_1\overline{u}_2\overline{b}\overline{c}u_2u_7\overline{u}_8\overline{u}_3\overline{d}\overline{e}u_3[\overline{u}_4u_4]\overline{f} &= 1 \qquad 1 \leftarrow \overline{u}_4u_4\\
au_8\overline{u}_9\overline{u}_5b\overline{c}u_5\overline{u}_6deu_6u_9u_{10}x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_1f\overline{a}u_1\overline{u}_2\overline{b}\overline{c}u_2u_7\overline{u}_8\overline{u}_3\overline{d}\overline{e}u_3\overline{f} &= 1\\
\dots &= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\ell(a)\ell(b)\ell(\overline{c})\ell(d)\ell(e)\ell(f)\ell(\overline{a})\ell(\overline{b})\ell(\overline{c})\ell(\overline{d})\ell(\overline{e})\ell(\overline{f}) = 1}$$

où $\ell(a)$ est homotope au plus court lacet $s(a)$ dans le graphe $S \cup a$ d'extrémité x passant par l'arête a :

$$\ell(a) \sim s(a) = \overline{u}_{10}\overline{u}_9\overline{u}_7\overline{u}_1 a u_4 u_8 u_{10}.$$

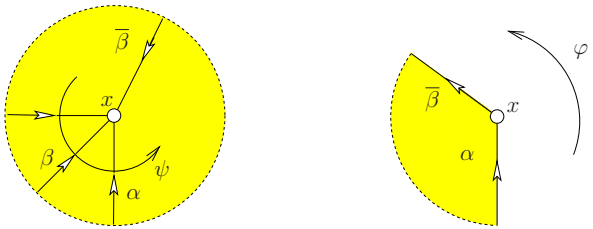
CODAGE DES LACETS



Comment coder les lacets $\ell(e)$, $e \in E$?

- $L(v)$ est la liste des lacets $\ell(e)$ ($e \in \hat{E}$) longeant l'arête orienté v de G.
- $L(\overline{v}) = \text{reversal}(\overline{L(v)})$;
- $L(e) = \ell(e)$ pour $e \in \hat{E}$;
- $L(u) = L(u_1)L(u_2)\dots L(u_k)$ où $u \in T$ et $u_1u_2\dots u_k$ est la liste des arêtes d'extrémités la source de u.

ASSEMBLER LES ANSES



- $\mathcal{G} = \{\alpha, \ldots\}$, $D(G)$, $M(\mathcal{G}) = \alpha\varphi(\alpha)\varphi^2(\alpha)\ldots$, $C(\mathcal{G}) = \alpha\psi(\alpha)\psi^2(\alpha)\ldots$;

-

$$\boxed{\varphi \circ \psi = \iota}.$$

ASSEMBLER LES ANSES

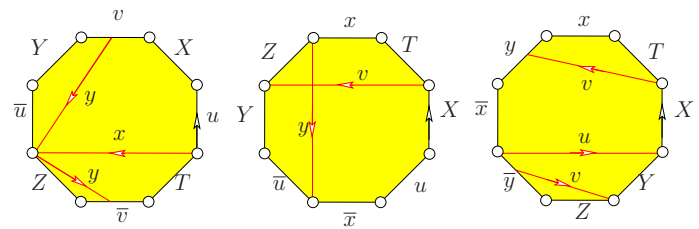


Figure 1: A brahana transformation

1. choose an interlaced pair u, v and define X, Y, Z, and T by $M(\mathcal{G}) = uXvY\overline{u}Z\overline{v}T$;
2. replace the loop v by a loop $x \sim uXvY\overline{u}$ traced in the interior of the disk $D(G)$; replace the loop u by a loop $y \sim ZY\overline{u}$ traced in the interior of the disk $D(G \setminus \{v\} \cup \{x\})$.

Thus we obtain a sequence $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \setminus \{v\} \cup \{x\}$ and $\mathcal{G}'' = \mathcal{G}' \setminus \{u\} \cup \{y\}$ of 3 cutgraphs whose associated polygonal schemata are $uXvY\overline{u}Z\overline{v}T$, $ZY\overline{ux}uXTx$, and $ZYXT[x, y]$, and whose associated cyclic sequences are $C\overline{u}$, $x\overline{ux}C_v$, and $[\overline{x}, y]C_{\{u,v\}}$ where C_D is the result of the substitution of the empty word to the occurences of the loops of $\hat{D}$ in the sequence C. (If X, Y, Z are all empty, then we will simply set $x = u$ and $y = v$.)

AN EXAMPLE

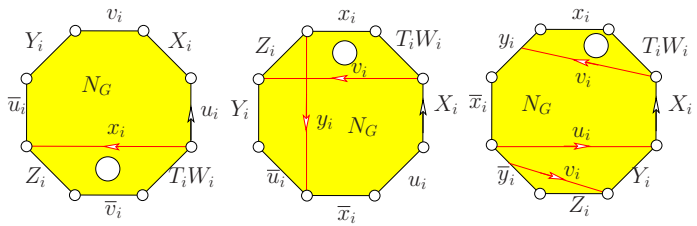
For example if $\mathcal{G} = \{a, b, c, d, e, f\}$ and $M(\mathcal{G}) = abcdef\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}\overline{e}\overline{f}$ we replace successively the loops $d, a, e, \overline{b}$ by the loops $x_1 \sim abcdef\overline{a}$, $y_1 \sim \overline{b}\overline{c}ef\overline{a}$, $x_2 \sim \overline{b}\overline{c}efb$, $y_2 \sim cfb$ (traced in the appropriated disks), and simply set $x_3 = c$ and $y_3 = f$; the successive corresponding polygonal schemata are

$M(G)$			$M(G')$			$M(G'')$
$\overbrace{uXvY\overline{u}}^{x}$	$Z\overline{v}$	T	$\overbrace{ZY\overline{u}}^{y}$	$\overline{x}u$	XTx	$ZYXT[x, y]$
$abcdef\overline{a}$	$\overline{b}\overline{c}\overline{d}$	$\overline{e}\overline{f}$	$\overline{b}\overline{c}ef\overline{a}$	$\overline{x}_1 a$	$bc\overline{e}\overline{f}x_1$	$\overline{b}\overline{c}efbc\overline{e}\overline{f}[x_1, y_1]$
$\overline{b}\overline{c}efb$	$c\overline{e}$	$\overline{f}[x_1, y_1]$	cfb	$\overline{x}_2\overline{b}$	$\overline{c}\overline{f}[x_1, y_1]x_2$	$cf\overline{c}\overline{f}[x_1, y_1][x_2, y_2]$

and the successive associated cyclic sequences are

$$\begin{array}{rcccccl}
\overline{f}e\overline{d}c\overline{b}af\overline{e}d\overline{c}b\overline{a} & = & C(G) & = & C \\
x_1\overline{ax}_1\overline{f}e\ c\overline{b}af\overline{e}\ \overline{c}b & = & C(G') & = & x_1\overline{ax}_1C_d \\
[\overline{y}_1, x_1]\overline{f}e\ c\overline{b}\ f\overline{e}\ \overline{c}b & = & C(G'') & = & [\overline{y}_1, x_1]C_{\{a,d\}} \\
x_2b\overline{x}_2[\overline{y}_1, x_1]\overline{f}\ \ c\overline{b}\ f\ \ \overline{c}b & = & & = & x_2b\overline{x}_2[\overline{y}_1, x_1]C_{\{a,d,e\}} \\
[\overline{y}_2, x_2][\overline{y}_1, x_1]\overline{f}\ \ c\ \ f\ \ \overline{c} & = & & = & [\overline{y}_2, x_2][\overline{y}_1, x_1]C_{\{a,d,e,b\}}.
\end{array}$$

MORE PRECISELY ...



We perform g Brahana transformations starting from G_0 to obtain a canonical cutgraph G_{2g}. Let $G_0, G_1, \ldots, G_{2g}$ be the sequence of cutgraphs associated with the Brahana transformations, let u_i, v_i be the interlaced pair of $G_{2(i-1)}$ chosen for the i-th Brahana transformation, and let x_i, y_i be the pair of G_{2i} that replaces the pair u_i, v_i. By definition $x_i \sim u_iX_iv_iY_i\overline{u}_i$ and $y_i \sim Z_iY_i\overline{u}_i$ (in the appropriated disks) where X_i, Y_i, Z_i, and T_i are defined by

$$M(G_{2(i-1)}) \ = \ u_iX_iv_iY_i\overline{u}_iZ_i\overline{v}_iT_i[x_1, y_1][x_2, y_2]\ldots[x_{i-1}, y_{i-1}]$$

(unless $X_i = Y_i = Z_i = \emptyset$, in which case $x_i = u_i$ and $y_i = v_i$). Our idea is to choose x_i in a tubular neighbourhood of ...

For $k = 0, 1, \ldots, 2g$ we define C_k to be the linear sequence of loops in $\hat{E}_k$ encountered when walking counterclockwise around the basepoint starting from the successor of $\overline{u}_1$ if $k = 0$; the successor of $\overline{x}_1$ otherwise.

SUITE

- Let $z_i = x_{\lceil i/2 \rceil}$ if i is odd; $y_{\lceil i/2 \rceil}$ otherwise. Similarly let $w_i = v_{\lceil i/2 \rceil}$ if i is odd; $u_{\lceil i/2 \rceil}$ otherwise. Let $z_i \sim c_i = \cdots$
- For $\gamma \in \hat{E}_0$ let $z_i(\gamma) = z_i$ if γ occurs in c_i; otherwise let $z_i(\gamma)$ be the empty word. Similarly let $\overline{z}_i(\gamma) = \overline{z}_i$ if $\overline{\gamma}$ occurs in c_i; otherwise let $\overline{z}_i(\gamma)$ be the empty word. Then we define $L_k(\gamma)$ $(k = 1, \ldots, 2g)$ to be the word

$$z_1(\gamma)z_2(\gamma)\cdots z_k(\gamma)\gamma(k)\overline{z}_k(\gamma)\cdots\overline{z}_2(\gamma)\overline{z}_1(\gamma) \tag{1}$$

where $\gamma(k) = \gamma$ if $\gamma \in \hat{E}_k$; the empty word otherwise.

EXAMPLE

In our example $M = abcdef\overline{abcdef}$ we need three Brahana transformations, e.g.,

$$\begin{aligned}(a, d) &\mapsto (x_1 \sim abcdef\overline{a},\ y_1 \sim \overline{b}\overline{c}ef\overline{a}),\\ (\overline{b}, e) &\mapsto (x_2 \sim \overline{b}\overline{c}efb,\ y_2 \sim cfb),\\ (c, f) &\mapsto (x_3 = c,\ y_3 = f)\end{aligned}$$

i	1	2	3	4
$L_i(a)$	$x_1a\overline{x}_1$	$x_1a^\circ\overline{y}_1\overline{x}_1$	$x_1\overline{y}_1\overline{x}_1$	$x_1\overline{y}_1\overline{x}_1$
$L_i(b)$	x_1b	$x_1b\overline{y}_1^*$	$x_1x_2^*b\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*$	$x_1x_2^*y_2^*b^\circ\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*$
$L_i(c)$	x_1c	$x_1c\overline{y}_1$	$x_1c\overline{x}_2\overline{y}_1$	$x_1y_2c\overline{x}_2\overline{y}_1$
$L_i(d)$	x_1d°	x_1	x_1	x_1
$L_i(e)$	x_1e	x_1y_1e	$x_1y_1x_2e^\circ$	$x_1y_1x_2$
$L_i(f)$	x_1f	x_1y_1f	$x_1y_1x_2f$	$x_1y_1x_2y_2f$

ROUTAGE DES LACETS

Theorem 13. *We claim that*

1. $C_k = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_tW_k$ *where* $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_t = C_{0|_{R_k}}$, $R_k = \hat{D}_k$ *or* $\hat{D}_{k-1} \cup \{\overline{w}_k\}$ *depending on whether* k *is even or odd, and where* W_k *is defined inductively by* $W_0 = \epsilon$, $W_{2i+1} = x_{i+1}\overline{u}_{i+1}\overline{x}_{i+1}W_{2i}$, $W_{2i+2} = [\overline{y}_{i+1}, x_{i+1}]W_{2i}$. *We note that* $t = 4g-2k$ *if* k *is even;* $4g-2k-1$ *otherwise.*
2. $L_k(C_0) = T_1\gamma_1T_2\gamma_2T_3\ldots\gamma_{t-1}T_t\gamma_tT_{t+1}$ *where*
   (a) $T_j \in A_k$ $(j = 1, \ldots, t)$;
   (b) $T_{t+1} \in B_k$;
3. C_k *is the unique terminal reduction of* $L_k(C_0)$ *modulo* $\{\overline{z}_1z_1, \overline{z}_2z_2, \ldots, \overline{z}_kz_k\}$. *Furthermore* $L_k(C_0)$ *contains no subword of type* $\overline{z}_i\overline{z}_iz_iz_i$, *for any* i. □

We define inductively the sequence of (finite) languages A_k by

1. $A_0 = B_0 = \{\epsilon\}$;
2. $A_{k+1} = \overline{z}_{k+1}A_kz_{k+1}A_k \cup A_k\overline{z}_{k+1}A_kz_{k+1} \cup A_k$;
3. $B_{2i+1} = A_{2i+1}z_{2i+1}^*\overline{u}_{i+1}\overline{z}_{2i+1}^*B_{2i}$;
4. $B_{2i+2} = A_{2i+1}\overline{z}_{2i+2}^*A_{2i+1}z_{2i+1}^*z_{2i+2}^*\overline{z}_{2i+1}^*B_{2i}$.

CONSTRUCTION OF THE WORDS $L_i(v)$. Bottom-up sweep of the tree ETC.

$L_i(e)$	$\overline{f}$	e	$\overline{d}$	c	$\overline{b}$	a	f	$\overline{e}$	d	$\overline{c}$	b	$\overline{a}$
init	$\overline{f}$	e	$\overline{d}$	c	$\overline{b}$	a	f	$\overline{e}$	d	$\overline{c}$	b	$\overline{a}$
$d \to x_1$	$\overline{f}\overline{x}_1$	x_1e	$\overline{d}^\circ\overline{x}_1$	x_1c	$\overline{b}\overline{x}_1$	$x_1a\overline{x}_1$	x_1f	$\overline{e}\overline{x}_1$	x_1d°	$\overline{c}\overline{x}_1$	x_1b	$x_1^*\overline{a}\overline{x}_1^*$
$a \to y_1$	$\overline{f}\overline{y}_1\overline{x}_1$	x_1y_1e	$\overline{x}_1$	$x_1c\overline{y}_1$	$y_1\overline{b}\overline{x}_1$	$x_1a^\circ\overline{y}_1\overline{x}_1$	x_1y_1f	$\overline{e}\overline{y}_1\overline{x}_1$	x_1	$y_1\overline{c}\overline{x}_1$	$x_1b\overline{y}_1^*$	$x_1^*y_1^*\overline{a}^\circ\overline{x}_1^*$
$e \to x_2$	$\overline{f}\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$	$x_1y_1x_2e^\circ$	$\overline{x}_1$	$x_1c\overline{x}_2\overline{y}_1$	$y_1x_2\overline{b}\overline{x}_2\overline{x}_1$	$x_1\overline{y}_1\overline{x}_1$	$x_1y_1x_2f$	$\overline{e}^\circ\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$	x_1	$y_1x_2\overline{c}\overline{x}_1$	$x_1x_2^*b\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*$	$x_1^*y_1^*\overline{x}_1^*$
$\overline{b} \to y_2$	$\overline{f}\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$	$x_1y_1x_2$	$\overline{x}_1$	$x_1y_2c\overline{x}_2\overline{y}_1$	$y_1x_2\overline{b}^\circ\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{x}_1$	$x_1\overline{y}_1\overline{x}_1$	$x_1y_1x_2y_2f$	$\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$	x_1	$y_1x_2\overline{c}\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{x}_1$	$x_1x_2^*y_2^*b^\circ\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*$	$x_1^*y_1^*\overline{x}_1^*$

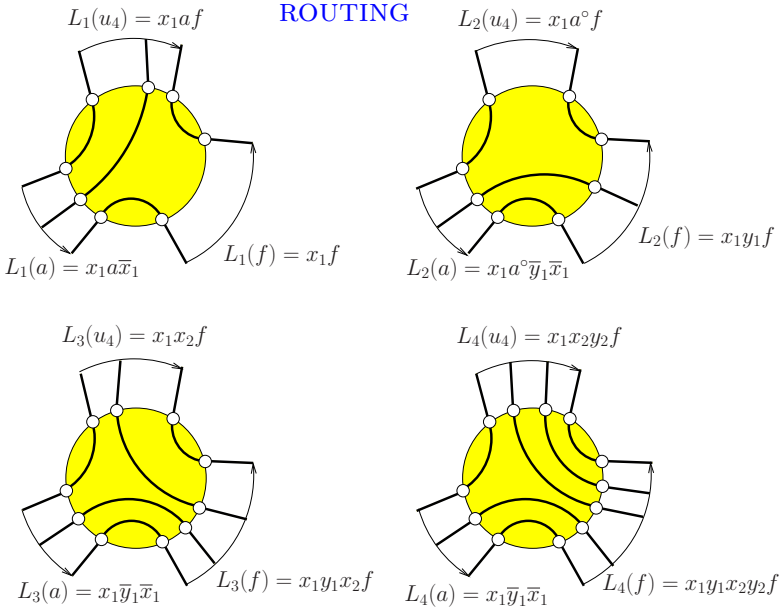
$L_i(u_j)$	$u_6 = e \oplus \overline{d}$	$u_5 = c \oplus \overline{b}$	$u_4 = a \oplus f$	$u_3 = \overline{e} \oplus d$	$u_2 = \overline{c} \oplus b$	$u_1 = \overline{a} \oplus \overline{f}$
init	$e\overline{d}$	$c\overline{b}$	af	$\overline{e}d$	$\overline{c}b$	$\overline{a}\overline{f}$
$d \to x_1$	$x_1e\overline{d}^\circ\overline{x}_1$	$x_1c\overline{b}\overline{x}_1$	x_1af	$\overline{e}d^\circ$	$\overline{c}b$	$x_1^*\overline{a}\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{x}_1$
$a \to y_1$	$x_1y_1e\overline{x}_1$	$x_1c\overline{b}\overline{x}_1$	$x_1a^\circ f$	$\overline{e}\overline{y}_1$	$y_1\overline{c}b\overline{y}_1^*$	$x_1^*y_1^*\overline{a}^\circ\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{y}_1\overline{x}_1$
$e \to x_2$	$x_1y_1x_2e^\circ\overline{x}_1$	$x_1c\overline{b}\overline{x}_2\overline{x}_1$	x_1x_2f	$\overline{e}^\circ\overline{x}_2\overline{y}_1$	$y_1x_2\overline{c}x_2^*b\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*$	$x_1^*y_1^*\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$
$\overline{b} \to y_2$	$x_1y_1x_2\overline{x}_1$	$x_1y_2c\overline{b}^\circ\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{x}_1$	$x_1x_2y_2f$	$\overline{x}_2\overline{y}_1$	$y_1x_2\overline{c}\overline{y}_2^*x_2^*y_2^*b^\circ\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*$	$x_1^*y_1^*\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$

$L_i(u_j)$	$u_9 = u_6 \oplus u_5$	$u_8 = u_4 \oplus u_3$	$u_7 = u_2 \oplus u_1$
init	$e\overline{d}c\overline{b}$	$af\overline{e}d$	$\overline{c}b\overline{a}\overline{f}$
$d \to x_1$	$x_1e\overline{d}^\circ c\overline{b}\overline{x}_1$	$x_1af\overline{e}d^\circ$	$\overline{c}bx_1^*\overline{a}\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{x}_1$
$a \to y_1$	$x_1y_1ec\overline{b}\overline{x}_1$	$x_1a^\circ f\overline{e}\overline{y}_1$	$y_1\overline{c}b\overline{y}_1^*x_1^*y_1^*\overline{a}^\circ\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{y}_1\overline{x}_1$
$e \to x_2$	$x_1y_1x_2e^\circ c\overline{b}\overline{x}_2\overline{x}_1$	$x_1x_2f\overline{e}^\circ\overline{x}_2\overline{y}_1$	$y_1x_2\overline{c}x_2^*b\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*x_1^*y_1^*\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$
$\overline{b} \to y_2$	$x_1y_1x_2y_2c\overline{b}^\circ\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{x}_1$	$x_1x_2y_2f\overline{x}_2\overline{y}_1$	$y_1x_2\overline{c}\overline{y}_2^*x_2^*y_2^*b^\circ\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*x_1^*y_1^*\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$

$L_i(u_j)$	$u_{10} = u_9 \oplus u_8 \oplus u_7$
init	$e\overline{d}c\overline{b}af\overline{e}d\overline{c}b\overline{a}\overline{f}$
$d \to x_1$	$x_1e\overline{d}^\circ c\overline{b}af\overline{e}d^\circ\overline{c}bx_1^*\overline{a}\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{x}_1$
$a \to y_1$	$x_1y_1ec\overline{b}a^\circ f\overline{e}\overline{c}b\overline{y}_1^*x_1^*y_1^*\overline{a}^\circ\overline{x}_1^*\overline{f}y_1^*x_1^*$
$e \to x_2$	$x_1y_1x_2e^\circ c\overline{b}f\overline{e}^\circ\overline{c}x_2^*b\overline{x}_2^*[\overline{y}_1^*, x_1^*]\overline{f}\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$
$\overline{b} \to y_2$	$x_1y_1x_2y_2c\overline{b}^\circ f\overline{c}\overline{y}_2^*x_2^*y_2^*b^\circ\overline{x}_2^*[\overline{y}_1^*, x_1^*]\overline{f}\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$

$L_i(x)$	$x = u_{10} \oplus u_{10} \cdots$
init	$e\overline{d}c\overline{b}af\overline{e}d\overline{c}b\overline{a}\overline{f}$
$d \to x_1$	$e\overline{d}^\circ c\overline{b}af\overline{e}d^\circ\overline{c}bx_1\overline{a}\overline{x}_1\overline{f}$
$a \to y_1$	$ec\overline{b}a^\circ f\overline{e}\overline{c}b\overline{y}_1^*x_1^*y_1^*\overline{a}^\circ\overline{x}_1^*\overline{f}$
$e \to x_2$	$e^\circ c\overline{b}f\overline{e}^\circ\overline{c}x_2^*b\overline{x}_2^*[\overline{y}_1^*, x_1^*]\overline{f}$
$\overline{b} \to y_2$	$c\overline{b}^\circ f\overline{c}\overline{y}_2^*x_2^*y_2^*b^\circ\overline{x}_2^*[\overline{y}_1^*, x_1^*]\overline{f}$
	$cf\overline{c}[\overline{y}_2^*, x_2^*][\overline{y}_1^*, x_1^*]\overline{f}$

ROUTING

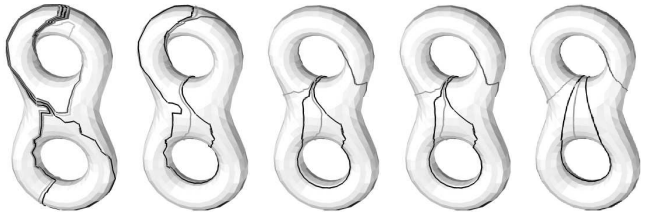


EXAMPLE

$$
\begin{aligned}
x_1 &\sim x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_1 a u_4 u_8 \overline{u}_9 \overline{u}_5 b c u_5 \overline{u}_6 d e u_6 u_9 u_{10} \overline{u}_{10} \overline{u}_7 \overline{u}_1 f \overline{a} u_1 u_7 u_{10} x \\
y_1 &\sim x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_2 \overline{b}\overline{c} u_2 u_7 \overline{u}_8 \overline{u}_3 e u_6 u_9 u_{10} \overline{u}_{10} \overline{u}_7 \overline{u}_1 \overline{a} u_1 u_7 u_{10} x \\
x_2 &\sim x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_2 \overline{b}\overline{c} u_2 u_7 \overline{u}_8 \overline{u}_3 e u_6 u_9 u_{10} \overline{u}_{10} \overline{u}_7 \overline{u}_1 f u_4 u_8 \overline{u}_9 \overline{u}_5 b u_2 u_7 u_{10} x \\
y_2 &\sim x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_2 c u_5 u_9 u_{10} \overline{u}_{10} \overline{u}_7 \overline{u}_1 f u_4 u_8 \overline{u}_9 \overline{u}_5 b u_2 u_7 u_{10} x \\
x_3 &\sim x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_2 c u_5 u_9 u_{10} x \\
y_3 &\sim x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_1 f u_4 u_8 u_{10} x
\end{aligned}
$$

Theorem 14. *Every word $L(u)$ contains at most two occurences of a generator symbol.* □

CALCUL, OPTIMISATION ET LISSAGE D'UN SCHÉMA POLYGONAL CANONIQUE



[1] F. Lazarus, M. Pocchiola, G. Vegter, and A. Verroust. Computing a canonical polygonal scheme of an orientable triangulated surface. In Proc. 17th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom., pages 80–89, 2001. Full version in preparation.

[2] É. Colin de Verdière and F. Lazarus. – Optimal system of loops on an orientable surface. Discrete Comput. Geom. – 33(3), March 2005. A preliminary version appeared in the Proc. 43rd Annu. IEEE Sympo. Found. Comput. Science (FOCS'02).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Éric Colin de Verdière and Jeff Erickson. Tightening non-simple paths and cycles on surfaces. In Proceedings of the 17th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), pages 192–201, January 2006.

[2] Jeff Erickson and Sariel Har-Peled. Optimally cutting a surface into a disk. Discrete Comput. Geom., 31:37–59, 2004. SoCG'02.

[3] É. Colin de Verdière and F. Lazarus. Optimal pants decompositions and shortest homotopic cycles on an orientable surface. In Proceedings of the 11th Symposium on Graph Drawing (GD'03), pages 478–490, 2003.

[4] E. Colin. de Verdière. – Raccourcissement de courbes et décomposition de surfaces. – Thèse, Ecole Normale Supérieure (Paris), December 2003.

[5] T. K. Dey and H. Schipper. A new technique to compute polygonal schema for 2-manifolds with application to null-homotopy detection. Discrete Comput. Geom., 14:93–110, 1995.

NOTES

NOTES

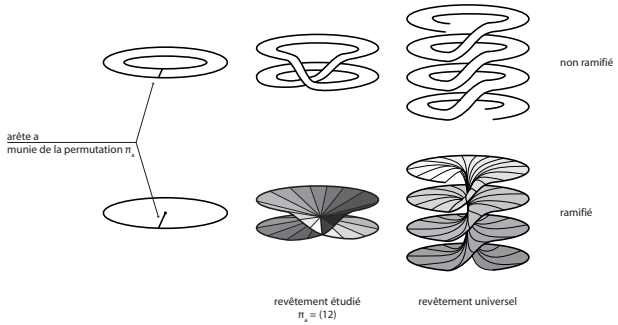
NOTES

NOTES

REVÊTEMENTS

Definition 6. *Un revêtement d'un espace X est la donnée d'un espace $\tilde{X}$ et d'une application continue $p : \tilde{X} \to X$ ayant la propriété suivante : il existe un recouvrement $\{U_\alpha\}$ de X par des ouverts tel que pour tout α, $p^{-1}(U_\alpha)$ est une union disjointe d'ouverts de $\tilde{X}$ homéomorphes via p à U_α.* □

Exemples: $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(ix) = (\cos x, \sin x) \in \mathbb{S}^1$, $z \in \mathbb{S}^1 \mapsto z^n \in \mathbb{S}^1$,
$(x, y, z) \in \{(s\cos t, s\sin t, t) \in \mathbb{R}^3 \mid (s, t) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}\} \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



(avec l'aimable autorisation de V. Pilaud)

REVÊTEMENTS RAMIFIÉS

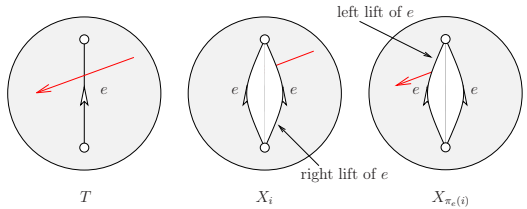
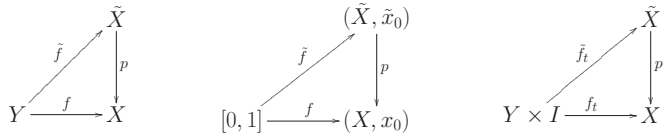


Figure 2: Contruction of coverings by cut and paste.

Soit X un espace topologique et Y une partie dense dans X. Un revêtement ramifié de X au dessus de Y est la donnée d'un espace $\tilde{X}$ et d'une application continue $p : \tilde{X} \to X$ telle que

1. sa restriction à $p^{-1}(Y)$ est un revêtement de Y;
2. p est un prolongement par continuité de cette restriction.

RELÈVEMENT DES CHEMINS ET DES HOMOTOPIES



Un relèvement de $f : Y \to X$ est une application continue $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$.

Proposition 7 (Relèvement des chemins)**.** *Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement, $f : I \to X$ un chemin dans X d'origine x_0, et $\tilde{x}_0$ un élément de la fibre de x_0 (i.e. un élément de $p^{-1}(x_0)$). Alors il existe un unique chemin $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ d'origine $\tilde{x}_0$ relevant le chemin f.* □

Proof. Cas particulier de la proposition suivante. □

Proposition 8 (Relèvement des homotopies)**.** *Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement, $f_t : Y \to X$ une homotopie et $f_0 : Y \to \tilde{X}$ un relèvement de f_0. Alors il existe une unique homotopie $\tilde{f}_t : Y \to \tilde{X}$ de $\tilde{f}_0$ relevant les f_t.* □

Proposition 9 (Unicité des relèvements)**.** *Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement, f une application continue d'un espace connexe Y dans X, et $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \to \tilde{X}$ deux relèvements de f qui coincident en un point de Y. Alors les deux relèvements coincident sur tout Y.* □

REVÊTEMENT UNIVERSEL

Theorem 15. *Soit X un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors X admet un revêtement simplement connexe.* □

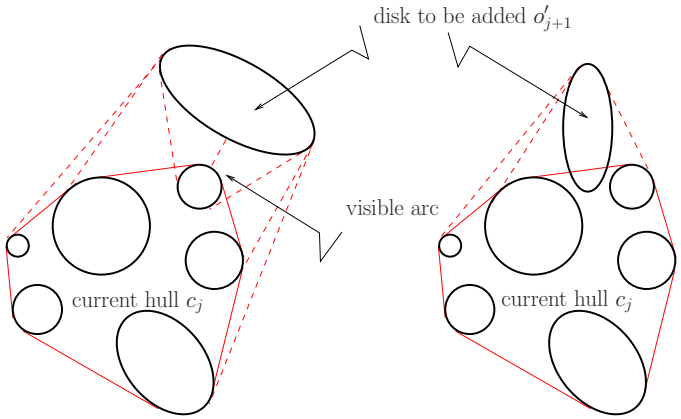
CLASSIFICATION DES REVÊTEMENTS

NOTES

NOTES

NOTES

UN PROBLÈME D'ENVELOPPE CONVEXE 2D



Soit à calculer l'enveloppe convexe d'une famille fini o_i de corps convexes disjoints deux-à-deux du plan euclidien en utilisant pour unique primitive géométrique l'évaluation du chirotope de la famille de corps convexes.

UNE IDÉE ET SA MISE EN ŒUVRE

Trouver un ordre linéaire des corps convexes tel que l'ensemble des points du bord de l'enveloppe convexe des j premiers corps visibles du $j+1$-ième soit connexe.

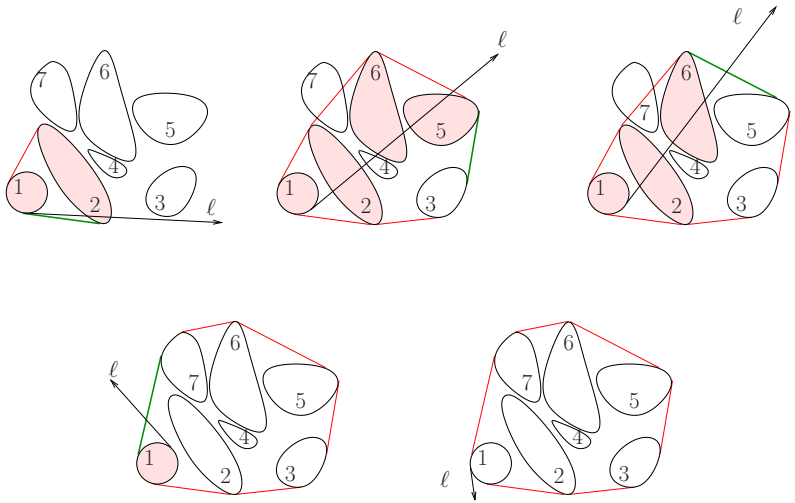
Le tri angulaire des corps autour d'un corps extremal c founit un tel ordre.

Demi-droite de balayage, ordre de balayage, événements $l_{\pm i}, l^{\pm i}$, événement mort.

Soit l la position courante de la demi-droite de balayage.

1. la liste $B(l) = v_1 v_2 \dots v_k$ ordonnée dans le sens positif des bitangentes du bord de l'env. convexe des corps atteints par la demi-droite de balayage l où v_1 est la bitangente gauche-gauche joignant les deux premiers corps; soit o'_j le corps contenant l'extrémité de v_j.
2. $v_*(l)$ la bitangente $v_{j'}$ où j' est le plus petit indice $1 \le j \le k$ tel que l^+ intersecte les corps convexes o'_i $(j \le i \le k)$ dans l'ordre $o'_k, o'_{k-1}, \dots, o'_j$; par construction la demi-droite l intersecte $v_*(l)$ ou l'arc suivant ou la bitangent suivante.
3. la liste $Q(l)$ des corps convexes $o'_k o'_{k-1} \dots o'_{j'}$;

ILLUSTRATION



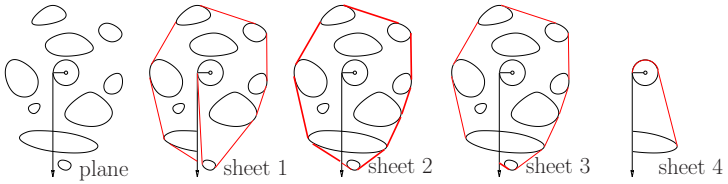
TRAITEMENT DES ÉVÉNEMENTS

Soit à traiter l'événement l' concernant le coprs convexe o successeur de l'événement l. On note r le corps convexe le plus à droite de $Q(l)$, r_* son prédecesseur sur le bord de l'env. convexe courante et r^* son successeur (s'il existe, i.e. $r \neq c$).

On localise o dans la liste $Q(l)$.

1. Supposons que o se situe à gauche de r entre α et α'. Alors o est inclus dans l'enveloppe convexe de α et α' ou les arcs aux extremités de $v_{\alpha'\alpha}$ sont visibles de o;
2. Supposons que o apparaît à droite de r. Alors o est inclus dans l'enveloppe convexe de r, r_* et r^* ou l'arc à l'extremité de $v_*(l)$ est visible de o.

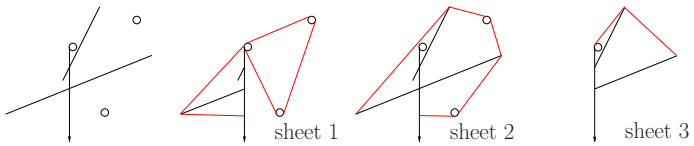
COMMENT TROUVER UN CORPS EXTRÉMAL?



1. Considérer un revêtement à 4 feuillets du plan privé d'un corps convexe;
2. Calculer (comment?) l'env. convexe des relevés des corps convexes situés entièrement dans les feuillets 1, 2 ou 3 ou à cheval sur les feuillets 1 et 2, 2 et 3 ou 3 et 4;
3. Extraire de l'enveloppe convexe calculée dans le revêtement celle des corps convexes du plan.

[1] L. Habert et M. Pocchiola. – Computing the convex hull of disks using only their chirotope. In : Abstracts 10th European Workshop Comput. Geom., pp. 111–114. – 2004.

TROIS FEUILLETS NE SONT PAS SUFFISANTS



NOTES

NOTES